

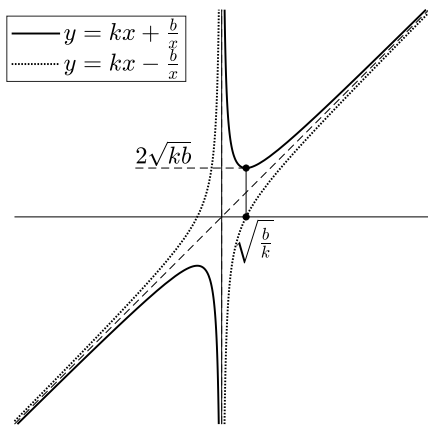
带 * 表示难度较大或者不方便设置待填空白的知识点。

1 函数

1. 求 $y = \frac{Ax+B}{Cx+D}$ ($AD-BC \neq 0$) 的值域 (只需写出计算方法, 无需具体结果):

_____.

2. 设 $k > 0, b > 0$, 则 $y = kx + \frac{b}{x}$ 与 $y = kx - \frac{b}{x}$ 的图像如下, 这两种函数都是双曲线,



当 $x > 0$ 时, $y = kx + \frac{b}{x}$ 在 $x = \frac{b}{k}$ 处取得极小值 _____; $y = kx - \frac{b}{x}$ 的零点是 $x = \frac{b}{k}$.

3. 求 $y = \frac{x^2 + Ax + B}{x + C}$ ①或 $y = \frac{x + C}{x^2 + Ax + B}$ ②的值域 (若分子或分母的最高次项系数不为 1, 则先将系数提取出来), 方法一: 换元 _____; 方法二: _____, 以①式为例写出主要过程: 要绘

制①或②的图像, 可以先绘制 $y = (x^2 + Ax + B)(x + C)$ 的图像, 因为这个三次函数的正负号与①或②式的正负号是一致的。

4. 求 $y = \frac{\sqrt{Ax^2+B}}{Cx^2+D}$ 的值域, 先提取系数, $y = \frac{\sqrt{A}}{C} \cdot \frac{\sqrt{x^2+\frac{B}{A}}}{x^2+\frac{D}{C}}$, 换元, $t = \frac{1}{x}$, 那么 $x^2 = t^2 - \frac{B}{A}$, $y = \frac{\sqrt{A}}{C} \cdot \frac{t}{t^2 - \frac{B}{A} + \frac{D}{C}} = \frac{\sqrt{A}}{C} \cdot \frac{1}{t + \left(\frac{D}{C} - \frac{B}{A}\right) \frac{1}{t}}$

5. $y = |x-b_1| + |x-b_2| + \dots + |x-b_n|$, 假设 $b_1 < b_2 < \dots < b_n$, 如果 n 是偶数, 那么最小值在区间 _____

内取得; 如果 n 是奇数, 那么最小值在 _____ 处取得。

6. 恒成立问题或有解问题 ($\exists$ 表示存在, $\forall$ 表示任意). $f(x)_{\max}, f(x)_{\min}$ 分别表示 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上的最大值、最小值。)

$$\exists x_0 \in (a, b), f(x_0) > m \Rightarrow \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\exists x_0 \in (a, b), f(x_0) < m \Rightarrow \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\forall x \in (a, b), f(x) < m \Rightarrow \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\forall x \in (a, b), f(x) > m \Rightarrow \underline{\hspace{2cm}}$$

7. 对数运算法则:

$$\log_a(MN) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$\log_a M^n = \underline{\hspace{2cm}}, \quad \log_{a^n} M = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$\text{换底公式: } \log_a M = \underline{\hspace{2cm}}.$$

8. 常见函数方程 (写出符合以下等式的函数):

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f(x_1 x_2) = f(x_1) f(x_2) \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) f(x_2) \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f(x_1 x_2) = f(x_1) + f(x_2) \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f(x_1 x_2) = x_2 f(x_1) + x_1 f(x_2) \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f(x_1 + x_2) + f(x_1 - x_2) = 2\lambda f(x_1) f(x_2) \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) + 2\lambda x_1 x_2 \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

9. * $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$ 或 $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$, 则

$$f(x_1) + f(x_2) = f(\underline{\hspace{2cm}})$$

10. 函数凹凸性, 填 “<” 或 “>”, 请结合图像记忆。

$$x_1, x_2 \in (0, \pi), x_1 \neq x_2,$$

$$\frac{1}{2}(\sin x_1 + \sin x_2) \underline{\hspace{1cm}} \sin \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$x_1, x_2 \in (0, \frac{\pi}{2}), x_1 \neq x_2,$$

$$\frac{1}{2}(\tan x_1 + \tan x_2) \underline{\hspace{1cm}} \tan \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$x_1, x_2 \in \mathbf{R}, x_1 \neq x_2,$$

$$\frac{e^{x_1} + e^{x_2}}{2} \underline{\hspace{1cm}} e^{\frac{x_1 + x_2}{2}}$$

$$x_1, x_2 \in (0, +\infty), x_1 \neq x_2,$$

$$\frac{\ln x_1 + \ln x_2}{2} \underline{\hspace{1cm}} \ln \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$x_1, x_2 \in (0, +\infty), x_1 \neq x_2, \alpha \in \mathbf{R}, \alpha > 1,$$

$$\frac{x_1^\alpha + x_2^\alpha}{2} \underline{\hspace{1cm}} \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^\alpha$$

11. 若 $f(x)$ 满足 $f(x) = \pm \frac{1}{f(x+a)}$, 那么 $f(x)$ 的一个周期是_____.

12. 若 $f(x)$ 满足 $f(x+a) = f(b-x)$, 则 $f(x)$ 的一条对称轴是 _____.

13. 如果 $f(x)$ 同时具有对称轴 $x = a$ 和对称中心 (b, c) , 且 $a \neq b$, 那么 $f(x)$ 具有周期 $T = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 三变量均值不等式: 设 $a, b, c \geq 0$, 则 $\frac{a+b+c}{3} \geq$ _____.

15. 设 $a, b > 0, x > 0$, 利用上面的三变量均值不等式, 有:

$$ax^2 + \frac{b}{x} = ax^2 + \frac{b}{2x} + \frac{b}{2x} \geq \underline{\hspace{2cm}};$$
$$ax + \frac{b}{x^2} = \frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}ax + \frac{b}{x^2} \geq \underline{\hspace{2cm}}.$$

16. 零点存在定理：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 连续，且 $f(a) \cdot f(b)$ _____，则一定存在 $x_0 \in (a, b)$ ，使 $f(x_0) = 0$ 。此定理为二分法找函数零点的理论基础。

17. * 记 $f_0(x) = x$, $f_1(x) = f(x)$, $f_{n+1}(x) = f(f_n(x))$. 称 $f_n(x)$ 为函数 $f(x)$ 的 n 次迭代。

$f(x)$	$f_n(x)$
$x + 2\sqrt{x} + 1$	
$\frac{x}{a + bx}$	
$\sqrt[k]{ax^k + b}$	
$x^2 + 2x$	
$\frac{x^2}{2x - 1}$	$\frac{x^{2^n}}{x^{2^n} - (x - 1)^{2^n}}$

18. $f_1(x) = f(x) = \frac{1+x}{1-x}$, $f_{n+1}(x) = f(f_n(x))$, $n \in \mathbf{N}^+$,
 $k \in \mathbf{N}$, 则 $f_{4k+1}(x) = \underline{\hspace{2cm}}$, $f_{4k+2}(x) = \underline{\hspace{2cm}}$,
 $f_{4k+3}(x) = \underline{\hspace{2cm}}$, $f_{4k+4}(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

2 排列、组合与二项式定理

19. 排列数: $P_n^k = \underline{\hspace{2cm}}$, 或者写成 A_n^k .

20. 组合数: $C_n^k = C_n^{n-k} = \underline{\hspace{2cm}}$.
递推关系: $C_n^k + C_n^{k-1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

21. 二项式定理: $(a+b)^n =$ _____.

22. $(a + b + c)^2 =$ _____.
 $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2$ 的结果类似。

23. 杨辉三角:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 1 & & \\
 & & & & \\
 & 1 & & 1 & \\
 & & & & \\
 1 & & 2 & & 1 \\
 & & & & \\
 \hline
 & & & & \\
 \hline
 & & & & \\
 \hline
 \end{array}$$

第 $n+1$ 行的系数之和为 $\sum_{k=0}^n C_n^k = \underline{\hspace{2cm}}$.

24. * 偶数件不同物品中选出奇数件物品的方法数 C_{2n}^1 , C_{2n}^3 , $C_{2n}^5, \dots$ 都是 _____ 数。(填“奇”或“偶”)

25. * 组合恒等式:

$$\sum_{k=r}^n C_k^r = \underline{\hspace{2cm}}, \quad \sum_{k=0}^r C_m^k C_n^{r-k} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\sum_{k=1}^n k C_n^k = \underline{\hspace{2cm}}, \quad \sum_{k=1}^n k^2 C_n^k = \underline{\hspace{2cm}}$$

26. * 设 n 个元素错排的方案数为 D_n , $D_1 = 0$, $D_2 = 1$, 则

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$$

$$D_n - nD_{n-1} = -[D_{n-1} - (n-1)D_{n-2}] = (-1)^n$$

$$\frac{D_n}{n!} - \frac{D_{n-1}}{(n-1)!} = \frac{(-1)^n}{n!}$$

$$D_n = n! \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right]$$

27. $(ax^\alpha + bx^\beta)^n$ 展开式的通项为

$$T_{r+1} = C_n^r a^{n-r} b^r x^{(n-r)\alpha+r\beta},$$

设 $C_n^m a^{n-m} b^m$ 是最大的系数, 则

$$\begin{cases} C_n^m a^{n-m} b^m \geq \underline{\hspace{2cm}} \\ C_n^m a^{n-m} b^m \geq \underline{\hspace{2cm}} \end{cases}$$

3 概率论与数理统计

28. 给定正整数集合 $S = \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$, 定义多项式 $f(x) = (1 + x^{k_1})(1 + x^{k_2}) \cdots (1 + x^{k_n})$, 则 $f(x)$ 的展开式中, _____ 恰好等于从集合 S 中选出元素总和为 m ($m \in \mathbf{N}$) 的子集的方法数。

29. 数学期望 (或均值) 的定义: $E(X) = \underline{\hspace{2cm}}$,
性质: $E(aX + b) = \underline{\hspace{2cm}}$.
方差: $D(X) = E\{[X - E(X)]^2\} = \underline{\hspace{2cm}}$,
性质: $D(aX + b) = \underline{\hspace{2cm}}$.

30. 伯努利大数定律: 独立地重复一个伯努利试验 n 次, 当 n 很大时, 频率逼近概率.

31. 概率加法公式:

$$P(A_1 \cup A_2) = \underline{\hspace{2cm}}$$

32. 条件概率公式: $P(B | A) = \underline{\hspace{2cm}}$.

概率乘法公式: $P(A \cap B) = \underline{\hspace{2cm}}$.

若 A, B 相互独立, 则 $P(A \cap B) = \underline{\hspace{2cm}}$.

33. 全概率公式: $P(A) = \underline{\hspace{2cm}}$.

34. * 贝叶斯公式:

$$P(\Omega_i | A) = \underline{\hspace{2cm}}$$

35. 二项分布 $b(n, p)$: 每次实验时, 事件 A 发生的概率为 p , 那么在 n 次实验中事件 A 发生 k 次的概率为 $P\{X = k\} = \underline{\hspace{2cm}}$. 数学期望为 $\underline{\hspace{2cm}}$, 方差为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

36. * 几何分布: 在 n 次伯努利试验中, 试验 k 次才得到第一次成功的概率, $P\{X = k\} = (1-p)^{k-1}p$, $k \in \mathbf{N}^+$, $0 < p < 1$. 数学期望为 $\underline{\hspace{2cm}}$, 方差为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

37. 超几何分布: 共有 N 件产品, 其中有 $D(D \leq N)$ 件次品, 从中任取 $n(n \leq N)$ 件, 其中恰有 $k(k \leq D)$ 件次品的概率: $P\{X = k\} = \underline{\hspace{2cm}}$. 数学期望为 $\underline{\hspace{2cm}}$, 方差为 $\frac{nD}{N} \left(1 - \frac{D}{N}\right) \left(\frac{N-n}{N-1}\right)$.

38. 正态分布: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, $\mu \in \mathbf{R}$, $\sigma > 0$. 数学期望为 $\underline{\hspace{2cm}}$, 方差为 $\underline{\hspace{2cm}}$. 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim \underline{\hspace{2cm}}$ (标准正态分布).

39. 最小二乘法, 回归直线 $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$.

$$\begin{aligned} \hat{b} &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2} \\ &= \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right) \left(\sum_{i=1}^n y_i\right)}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2} \end{aligned}$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$$

回归直线通过散点图的几何中心 $(\bar{x}, \bar{y})$.

40. 样本相关系数

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2 - n\bar{y}^2}} \\ &= \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right) \left(\sum_{i=1}^n y_i\right)}{\sqrt{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2} \cdot \sqrt{n \sum_{i=1}^n y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n y_i\right)^2}} \end{aligned}$$

4 三角函数

41. 正余弦和角、差角公式:

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \underline{\hspace{2cm}}$$

42. 二倍角公式:

$$\sin 2x = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\cos 2x = \underline{\hspace{2cm}}$$

(余弦二倍角需写出三种形式)

43. * 三倍角公式:

$$\sin 3x = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\cos 3x = \underline{\hspace{2cm}}$$

44. 余弦的递推关系:

$$\cos(n+1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta - \underline{\hspace{2cm}}$$

45. 和差化积:

$$\sin x + \sin y = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\cos x + \cos y = \underline{\hspace{2cm}}$$

46. 积化和差:

$$\sin x \sin y = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\cos x \cos y = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\sin x \cos y = \underline{\hspace{2cm}}$$

47. 辅助角公式:

$$a \sin x + b \cos x$$

$$= \underline{\hspace{2cm}} \quad \left(\tan \varphi = \frac{b}{a} \right)$$

变体一:

$$a \sin x + b \cos(x + x_0)$$

$$= \underline{\hspace{2cm}}$$

变体二:

$$a \cos^2 x + b \sin^2 x + c \sin x \cos x$$

$$= \underline{\hspace{2cm}}$$

变体三:

$$a \sin^2 x + b \cos x = \underline{\hspace{2cm}}$$

48. *

$$\sum_{k=1}^n \cos kx = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\sum_{k=1}^n \sin kx = \underline{\hspace{2cm}}$$

49. * $\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n} = \underline{\hspace{2cm}}.$

50. * $\triangle ABC$ 中的恒等式 ($A + B + C = \pi$):

$$\sin A + \sin B + \sin C = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\cos A + \cos B + \cos C = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\tan A + \tan B + \tan C = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\tan\left(\frac{A}{2}\right) \tan\left(\frac{B}{2}\right) + \tan\left(\frac{B}{2}\right) \tan\left(\frac{C}{2}\right) +$$

$$\tan\left(\frac{A}{2}\right) \tan\left(\frac{C}{2}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$$

51. 对于 $\triangle ABC$, 考虑 $A = B = C = \frac{\pi}{3}$ 的特殊情形, 以及两个角趋近于 0, 第三个角趋近于 π 时的极限 (或者一个角趋近于 0, 剩余两个角趋近于 $\frac{\pi}{2}$), 有

$$\underline{\hspace{2cm}} < \sin A + \sin B + \sin C \leq \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\underline{\hspace{2cm}} < \sin A \sin B \sin C \leq \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\underline{\hspace{2cm}} < \cos A + \cos B + \cos C \leq \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\underline{\hspace{2cm}} < \cos A \cos B \cos C \leq \underline{\hspace{2cm}}$$

52. * 双曲正弦函数 $\sinh x = \underline{\hspace{2cm}},$

$$\text{反双曲正弦函数 } \operatorname{arsinh} x = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$\text{双曲余弦函数 } \cosh x = \underline{\hspace{2cm}},$$

$$\text{反双曲余弦函数 } \operatorname{arcosh} x = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$\text{求导: } (\sinh x)' = \underline{\hspace{2cm}}; (\cosh x)' = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(\operatorname{arsinh} x)' = \underline{\hspace{2cm}}; (\operatorname{arcosh} x)' = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$\text{平方差关系: } (\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = \underline{\hspace{2cm}}.$$

5 复数

53. 虚数单位 i 的整数次幂的周期性:

$$i^{4n} = \underline{\hspace{2cm}}, i^{4n+1} = \underline{\hspace{2cm}}, i^{4n+2} = \underline{\hspace{2cm}}, i^{4n+3} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

54. 共轭复数的性质:

$$\bar{\bar{z}} = \underline{\hspace{2cm}}, \overline{z_1 \pm z_2} = \underline{\hspace{2cm}},$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \underline{\hspace{2cm}}, \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

55. 复数的模的性质:

$$|z| = \underline{\hspace{2cm}}, z\bar{z} = \underline{\hspace{2cm}},$$

$$|z_1 z_2| = \underline{\hspace{2cm}}, \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \underline{\hspace{2cm}},$$

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = \underline{\hspace{2cm}}.$$

56. 三角不等式: $\underline{\hspace{2cm}} \leq |z_1 \pm z_2| \leq \underline{\hspace{2cm}}.$

57. 去掉 $\sqrt{A+B\sqrt{C}}$ ($A > 0, C > 0$) 的外层根号的方法:
 设 $\sqrt{A+B\sqrt{C}} = x + y\sqrt{C}$, 两边平方, 然后比较左右两边 $\sqrt{C}$ 的系数和另一项, 可得到两个方程:
 $\underline{\hspace{2cm}}.$ 根据基本不等式, $A \geq \underline{\hspace{2cm}}$ 是可以去掉外层根号的必要不充分条件.

58. 去掉 $\sqrt{a+bi}$ 的根号的方法: 设 $\sqrt{a+bi} = x + yi$, 两边平方, 然后比较左右两边的实部和虚部, 可得到两个方程: $\underline{\hspace{2cm}}.$

59. * 欧拉公式 $e^{ix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

60. * 自然对数的底数 $e = 2.718281828 \cdots$ 的定义:

$$e = \underline{\hspace{2cm}}$$

61. $\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\underline{\hspace{2cm}})^n$,
 将等号右边用二项式定理展开后, 比较左右两边的实部和虚部, 即可得到任意的 n 倍角公式.

62. * $(x + iy)(\cos \theta + i\sin \theta)$
 $= \underline{\hspace{2cm}}$ (坐标旋转公式).

6 向量

63. 零向量具有任意方向.

64. $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, 两者的数量积 (“点乘”) 定义为

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \underline{\hspace{2cm}}$$

$\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角的余弦为

$$\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \underline{\hspace{2cm}}$$

65. 二阶行列式: $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

66. $\vec{a} \perp \vec{b}$ 的充要条件是 $\underline{\hspace{2cm}}$ (用坐标表示).
 $\vec{a} // \vec{b}$ 的充要条件是 $\underline{\hspace{2cm}}$ (用坐标表示).

67. 向量基本定理: 如果 $\vec{e}_1$ 与 $\vec{e}_2$ 是平面上两个不平行的向量, 那么该平面上的任意向量 $\vec{a}$, 都可唯一地表示为 $\vec{e}_1$ 与 $\vec{e}_2$ 的线性组合, 即存在唯一的一对实数 λ 与 μ , 使得 $\underline{\hspace{2cm}}.$

68. 平面上有不同的四点 O, P, Q, R , 设 $\overrightarrow{OR} = \lambda \overrightarrow{OP} + \mu \overrightarrow{OQ}$, 则 P, Q, R 三点共线的充要条件是 _____.

7 解三角形

69. 外心: 三条 _____ 线的交点;
 内心: 三条 _____ 线的交点;
 重心: 三条 _____ 线的交点;
 垂心: 三条 _____ 线的交点.

70. 对于 $\triangle ABC$, 重心 G 分割中线的比例为 _____.
 设 O 为空间中的任意一点, 则

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

71. 正弦定理:

R 为三角形外接圆半径.

72. 余弦定理:

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} \\ &= \dots \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= \dots \\ \cos C &= \dots \end{aligned}$$

73. 对任意三角形, “大边”是“大角”的充要条件.

74. * 对于 $\triangle ABC$,

$$a + b + c \geq 2(a \cos A + b \cos B + c \cos C)$$

将三个余弦定理的式子相加可得:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2bc \cos A + 2ac \cos B + 2ab \cos C$$

将上式中的 a, b, c 换成任意实数 x, y, z , 同时保持 $A + B + C = \pi$, 那么有嵌入不等式

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq \dots$$

75. $(a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2 = (\dots)^2$, 具有勾股定理的形式. 让 $a, b (a \neq b)$ 取正整数, 就能得到勾股数, 比如 $(3, 4, 5), (5, 12, 13), (7, 24, 25), (8, 15, 17), (9, 40, 41), (11, 60, 61), (20, 21, 29)$.

76. 把上一条中的 a^2 换成 $\vec{a}$, b^2 换成 $\vec{b}$, 实数乘法换成向量点乘, 就得到向量的极化恒等式:

77. 对于 $\triangle ABC$, R 为外接圆半径, r 为内切圆半径, $p = \frac{a+b+c}{2}$ 为三角形周长的一半, 三角形的面积公式有: 两边夹角: _____.

只含 R, A, B, C : _____.

只含 R, a, b, c : _____.

只含 p, r : _____.

只含 p, a, b, c : _____.

78. r 为内切圆半径, 则 $r = \dots$ (用 p, a, b, c 表示).

79. * $\triangle ABC$ 的费马点: 分别以 AB, BC, AC 为边, 在 $\triangle ABC$ 外部 (或内部) 作三个等边三角形, 这三个等边三角形的外接圆会交于同一点, 即费马点. 当三角形的最大内角小于 120° 时, 费马点位于三角形内部, 设费马点与三个顶点连线长度分别为 x, y, z , 则

$$xy + yz + zx = \frac{4}{\sqrt{3}} S_{\triangle ABC} \leq \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$$

80. * $\triangle ABC$ 内部有任意一点 O , 记 $\triangle AOB, \triangle BOC, \triangle COA$ 的面积分别为 S_A, S_B, S_C , 那么有:

$$S_A \cdot \dots + S_B \cdot \dots + S_C \cdot \dots = \vec{0}$$

◇ 当 O 是 $\triangle ABC$ 的重心时,

$$S_A : S_B : S_C = \dots$$

◇ 当 O 是 $\triangle ABC$ 的垂心时,

$$S_A : S_B : S_C = \dots$$

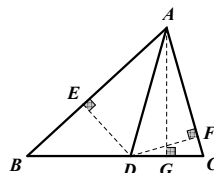
◇ 当 O 是 $\triangle ABC$ 的内心时,

$$S_A : S_B : S_C = \dots$$

◇ 当 O 是 $\triangle ABC$ 的外心时,

$$S_A : S_B : S_C = \dots$$

81. D 是 $\triangle ABC$ 的 BC 边上的一点, 则 $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|CD|}$ 的充分必要条件是: AD 是 _____.



8 导数与积分

82. 基本初等函数的导数公式:

$$(x^\alpha)' = \dots, (\ln x)' = \dots,$$

$$(a^x)' = \dots, (e^x)' = \dots,$$

$$(\sin x)' = \dots, (\cos x)' = \dots,$$

$$(\tan x)' = \dots.$$

83. 导数运算法则:

$$[c_1 f(x) + c_2 g(x)]' = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$[f(x) \cdot g(x)]' = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \underline{\hspace{2cm}}$$

84.

$$[f(x) \cdot x^n]' = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\left[\frac{f(x)}{x^n} \right]' = \underline{\hspace{2cm}}$$

85. 复合函数求导法则: $[g(f(x))]' = g'(u)f'(x)$, 再将 u 换回 $f(x)$. 比如 $[\ln f(x)]' = \underline{\hspace{2cm}}$.

86. 设 $f(x) = (x - x_0)^n g(x)$, 两边取自然对数, 有

$$\ln f(x) = n \ln(x - x_0) + \ln g(x)$$

两边求导, 有

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \underline{\hspace{2cm}}$$

87. 可导奇函数的导函数是____函数 (填“奇”或“偶”);
可导偶函数的导函数是____函数。

88. 把 $e^x \geq x + 1$ 中的 x 换成 $x - 1$, 有 $e^{x-1} \geq x$, 两边同乘 e , 有 $\underline{\hspace{2cm}}$.

89. 把 $e^x \geq x + 1$ 中的 x 换成 $-x$, 有 $e^{-x} \geq -x + 1$, 当 $x < 1$ 时, 两边同时取倒数, 有 $e^x \leq \underline{\hspace{2cm}}$.

90. x 换成 $\alpha x (\alpha > 0)$, 有 $e^{\alpha x} \geq \alpha x + 1$, 当 $1 + \alpha x > 0$ 时, 两边同时开 α 次方, 有 $e^x \geq \underline{\hspace{2cm}}$.

91. * e 是自然对数的底数, $n \in \mathbf{N}^+$, 则

$$2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

92. 对于三次函数 $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, 对称中心的坐标为 $\underline{\hspace{2cm}}$, 对称中心也是三次函数的拐点 (二阶导数为 0, 且二阶导数在此点左右异号)。

93. * 函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的泰勒 (Taylor) 级数

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots$$

当 $x_0 = 0$ 时,

$$e^x = \underline{\hspace{2cm}} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \cdots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots$$

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2(\underline{\hspace{2cm}} + \cdots)$$

94. 当 $|x| < 0.2$ 时, $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$ (x 可正可负). 而且 $|x|$ 越小, 这个估算公式越精确。

$$\sqrt{1.1} = 1.048808 \cdots \approx 1 + \frac{1}{2} \times 0.1 = 1.05,$$

$$\sqrt{73} = 8.544003 \cdots = \sqrt{64+9} = \sqrt{64 \left(1 + \frac{9}{64}\right)} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

95. * 拉格朗日中值定理: 如果函数 $f(x)$ 满足: (1) 在闭区间 $[x_1, x_2]$ 上连续; (2) 在开区间 (x_1, x_2) 内可导。

那么至少存在一点 $\xi \in (x_1, x_2)$, 使得 $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. (至少能作出一条和割线斜率相等的切线)。

96. * 小于等于 n 的全部正整数的 $1 \sim 5$ 次方的求和结果:

$$1^1 + 2^1 + 3^1 + \cdots + n^1 = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}$$

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4 = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$$

$$1^5 + 2^5 + 3^5 + \cdots + n^5 = \frac{n^6}{6} + \frac{n^5}{2} + \frac{5n^4}{12} - \frac{n^2}{12}$$

$1 \sim n$ 的 k 次方求和结果是关于 n 的 $k+1$ 次多项式, 多项式的系数从高次项到低次项依次为

$$\frac{1}{k+1}, \frac{1}{2}, \frac{k}{12}, 0, -\frac{k(k-1)(k-2)}{720}, \dots$$

9 不等式

97. 糖水不等式: 若 $0 < b < a, c > 0$, 则 $\frac{b}{a} < \underline{\hspace{2cm}}$.

$$\frac{1}{a^k - 1} \leq \underline{\hspace{2cm}}$$

98. 设 a, b, c, d 均大于 0, 且 $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, 那么 $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

99. 设 $a > 1$, 当 $k \geq 1$ 时, $a^k - 1 \geq a^k - a^{k-1} = (a-1)a^{k-1}$, 所以

$$\frac{1}{a^k - 1} \leq \underline{\hspace{2cm}}$$

100. * 伯努利不等式: 当 $x > -1$ 时,

• 若 $\alpha > 1$, 则 $(1+x)^\alpha \underline{\hspace{1cm}} 1 + \alpha x$;

• 若 $0 < \alpha < 1$, 则 $(1+x)^\alpha \underline{\hspace{1cm}} 1 + \alpha x$.

用数学归纳法或求导证明。

101. $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

$$\frac{\pi}{2} < \sin x < \frac{\pi}{2} < x + \frac{x^3}{3} < \frac{3x}{3-x^2} < \tan x < \frac{x}{1-\frac{2}{\pi}x}$$

102. $x \in \mathbf{R}$, $\cos x \geq$ _____ (泰勒级数取前两项).

$$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \cos x < 1 - \frac{4x^2}{\pi^2}.$$

103. $x \in (0, 1)$, $e^{2x} < \frac{1+x}{1-x}$.

两边取自然对数, 有 $2x < \frac{1+x}{1-x}$.

令 $t = \frac{1+x}{1-x} \in (1, +\infty)$, 则 $x = \frac{t-1}{t+1}$, 上面的不等式变为 _____.

104. $t \in (1, +\infty)$, $\ln t < \frac{t-1}{t+1}$ (含 $\sqrt{t}$).

105. 对任意两个不等的正实数 x_1, x_2 , 有

$$\sqrt{x_1 x_2} < \frac{x_2 - x_1}{\ln x_2 - \ln x_1} < \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$\frac{x_2 - x_1}{\ln x_2 - \ln x_1}$ 称为对数平均值. 把上式中的 x_1 换成 e^{x_1} , x_2 换成 e^{x_2} , 可得:

$$\frac{x_2 - x_1}{\ln x_2 - \ln x_1} > \frac{x_1 + x_2}{2}$$

106. 两变量均值不等式 (包含 4 种均值):

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2} \geq \frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}} \geq \sqrt[4]{x_1^2 x_2^2}$$

107. 若 $x \in \mathbf{R}$, 则 $\sqrt{x^2 + 4} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} \geq \frac{5}{2}$.

108. * 柯西不等式:

$\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, 那么

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$$

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}|^2 \leq |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2$$

把上式转化为坐标表示:

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$$

109. $a, b, c \in \mathbf{R}$, 因为 $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$, 所以, $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

110. 含根号的缩放:

$$\frac{1}{\sqrt{k}} > 2\sqrt{k} > \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{k}} > \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

以上各项除 $2\sqrt{k}$ 外, 取倒数后均可裂项.

111. 含平方的缩放:

$$\frac{1}{k^2 + 1} \geq k^2 + 1 > k^2 > \frac{1}{k^2}$$

$$\frac{1}{k^2 + 1} > \frac{1}{k^2}$$

以上各项除 $k^2 + 1$ 和 k^2 外, 取倒数后均可裂项.

112. 正整数倒数求和缩放:

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} < \frac{1}{n-1}$$

10 数列

113. 设 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列, S_n 是其前 n 项和,

• 若 $m + n = s + t$, 则 $a_m + a_n = a_s + a_t$;

• $S_{m+n} = S_m + S_n + nd$;

• $\frac{S_{2n-1}}{a_n} = \frac{S_{2n-1}}{a_n}$;

• $m \neq n$, $\frac{S_m - S_n}{m - n} = \frac{S_{m+n} - S_n}{m + n} = d$;

• $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n} \dots$ 是公差为 nd^2 的等差数列;

• 在前 $2n$ 项中, $\frac{\text{奇数项之和}}{\text{偶数项之和}} = \frac{a_1 + a_3 + \dots + a_{2n-1}}{a_2 + a_4 + \dots + a_{2n}} = \frac{a_1}{a_2}$;

• 在前 $2n+1$ 项中, $\frac{\text{奇数项之和}}{\text{偶数项之和}} = \frac{a_1 + a_3 + \dots + a_{2n+1}}{a_2 + a_4 + \dots + a_{2n}} = \frac{a_1}{a_2}$;

114. 等比数列 $a_n = a_1 x^{n-1}$ 的求和公式: 当 $x \neq 1$ 时, $S_n = \frac{a_1(1-x^n)}{1-x}$. 若 $|x| < 1$, 则 $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$.

115. 等差乘以等比型数列求和 ($x \neq 1$):

$$\sum_{k=1}^n kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$$

当 $|x| < 1$ 时,

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

对上式求导,

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

因为 $k^2 x^{k-1} = x \cdot k(k-1)x^{k-2} + kx^{k-1}$, 所以

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^{k-1} = \frac{x}{(1-x)^3} + \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^k = \frac{x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2}$$

116. 常见裂项方法:

$$\frac{1}{n(n+k)} = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} \right)$$

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right)$$

$$\frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+k}} = \frac{\sqrt{n+k} - \sqrt{n}}{k}$$

$$\frac{1}{a^n(a^n+1)} = \frac{1}{a^n} \left(\frac{1}{a^n+1} - \frac{1}{a^{2n}+1} \right)$$

117. * 阿贝尔 (Abel) 求和公式: 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 A_n, B_n , 那么

$$\sum_{k=1}^n A_k b_k + \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1} B_k = A_n B_n \quad (1)$$

118. 对于一阶线性递推数列 $a_{n+1} = Aa_n + B$ ($A \neq 1$), 先解方程_____, 然后递推公式两边减去 x , $a_{n+1} - x = A(\text{_____})$, 这样就转化成了等比数列。

119. $a_{n+1} = Aa_n + Bq^n$. 两边同除 q^n , 有 $\frac{a_{n+1}}{q^n} = \text{_____}$, 这样就转化成了上一条中的一阶线性递推数列。

120. $a_{n+1} = Aa_n^2$, 则 $Aa_{n+1} = \text{_____} = \cdots = \text{_____}$.

121. $a_{n+1} = a_n^2 + 2a_n$. 两边同时加 1, $a_{n+1} + 1 = \text{_____}$.

122. $a_{n+1} = a_n^2 - 2a_n + 2$. 两边同时减 1, $a_{n+1} - 1 = \text{_____}$.

123. $a_{n+1} = \frac{Aa_n}{Ca_n + D}$, 两边取倒数, $\frac{1}{a_{n+1}} = \text{_____}$, 那么 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 为一阶线性递推数列。

124. 对于二阶线性递推数列 $a_{n+2} = Aa_{n+1} + Ba_n$, 先解特征方程_____, 假设有两个不等的根 x_1, x_2 (可以为复数), 那么

$$a_{n+2} - x_2 a_{n+1} = x_1 (a_{n+1} - x_2 a_n) = \cdots = \text{_____}$$

$$a_{n+2} - x_1 a_{n+1} = x_2 (a_{n+1} - x_1 a_n) = \cdots = \text{_____}$$

125. 分式线性递推数列 $a_{n+1} = \frac{Aa_n + B}{Ca_n + D}$, 先解方程_____, 假设有两个不等的根 x_1, x_2 (可以为复数), 那么

$$a_{n+1} - \alpha = \frac{Aa_n + B - \alpha(Ca_n + D)}{Ca_n + D} = \text{_____}$$

$$a_{n+1} - \beta = \frac{Aa_n + B - \beta(Ca_n + D)}{Ca_n + D} = \text{_____}$$

两式相除可得:

$$\frac{a_{n+1} - \alpha}{a_{n+1} - \beta} = \left(\frac{A - C\alpha}{A - C\beta} \right) \cdot \frac{a_n - \alpha}{a_n - \beta} = \cdots = \text{_____}$$

11 解析几何

126. 直线的方程:

一般式方程: _____;

点法式方程: _____;

斜截式方程: _____;

点斜式方程: _____;

截距式方程: _____;

两点式方程: _____.

127. 直线的参数方程: $\begin{cases} x = \text{_____} \\ y = \text{_____} \end{cases}$, ϕ 是直线的倾斜角, $|t|$ 表示直线上任一点到 (x_0, y_0) 的距离. 更一般地, 可以写成 $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$, 若 $a^2 + b^2 \neq 1$, 则此时的 $|t|$ 不再表示距离, 这一点需要注意。

128. 点 (x_0, y_0) 到直线 $Ax + By + C = 0$ 的距离公式: _____.

129. 两条平行直线 $Ax + By + C_1 = 0$ 和 $Ax + By + C_2 = 0$ 的距离公式: _____.

130. * 平面的方程:

一般式方程: _____;

点法式方程: _____;

截距式方程: _____.

131. * 点 (x_0, y_0, z_0) 到平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的距离公式: _____.

132. 设二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两根为 x_1, x_2 , 判别式为 Δ , 则 $|x_1 - x_2| = \text{_____}$, $x_1^2 + x_2^2 = \text{_____}$.

133. 椭圆和双曲线的准线方程是 _____.

134. 点差法, 在椭圆上取不同的两点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, 则

$$\begin{cases} \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \\ \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

两式相减, 有 $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \text{_____}$.

如果是双曲线, 则 $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \text{_____}$.

135. * 圆锥曲线 (不包括圆) 的统一极坐标方程: $\rho = \text{_____}$. p 代表焦点到准线的距离. e 是离心率. 椭圆: $0 < e < 1$; 抛物线: $e = 1$; 双曲线: $e > 1$. 过焦点且倾斜角为 θ 的弦的长度为 _____.

136. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的参数方程: $\begin{cases} x = \underline{\hspace{2cm}} \\ y = \underline{\hspace{2cm}} \end{cases}$.

137. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的参数方程: $\begin{cases} x = \underline{\hspace{2cm}} \\ y = \underline{\hspace{2cm}} \end{cases}$.

138. 抛物线 $y^2 = 2px$ 的参数方程: $\begin{cases} x = \underline{\hspace{2cm}} \\ y = \underline{\hspace{2cm}} \end{cases}$.

139. * 椭圆面积公式为 $\underline{\hspace{2cm}}$, 而不是 $\frac{1}{2}\pi(a^2 + b^2)$; 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的体积公式为 $\frac{4}{3}\pi abc$, 而不是 $\frac{4}{9}\pi(a^3 + b^3 + c^3)$.

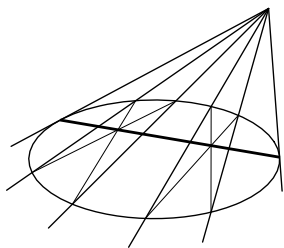
140. 到平面上两定点的距离之比为不等于 1 的定值的点的轨迹是圆 (称为“阿波罗尼奥斯圆”).

141. 椭圆上一点 (x_0, y_0) 的切线斜率为 $\underline{\hspace{2cm}}$, 切线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$ (换一半).

142. 双曲线上一点 (x_0, y_0) 的切线斜率为 $\underline{\hspace{2cm}}$, 切线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$ (换一半).

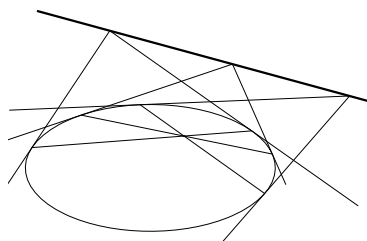
143. 抛物线 $y^2 = 2px$ 上一点 (x_0, y_0) 的切线斜率为 $\underline{\hspace{2cm}}$, 切线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$ (换一半).

144. 当点 (x_0, y_0) 在椭圆外部时, 直线 $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$ 表示椭圆的切点弦, 即从点 (x_0, y_0) 向椭圆作两条切线, 连接两个切点得到的弦.



从点 (x_0, y_0) 出发作椭圆的两条割线, 与椭圆有 4 个交点, 那么以这 4 个交点为顶点的四边形的对角线交点也在切点弦上.

145. 当点 (x_0, y_0) 在椭圆内部时, 直线 $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$ 与椭圆相离, 从直线 $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$ 上的点向椭圆作两条切线, 则切点弦过定点 (x_0, y_0) .



146. 判断直线 $l: Ax + By + C = 0$ 与椭圆的位置关系, 将直线方程变形为

$$\frac{\left(-\frac{Aa^2}{C}\right)x}{a^2} + \frac{\left(-\frac{Bb^2}{C}\right)y}{b^2} = 1$$

设 $P\left(-\frac{Aa^2}{C}, -\frac{Bb^2}{C}\right)$, 当 P 点在椭圆内部时 (即 $A^2a^2 + B^2b^2 < C^2$), 直线 l 与椭圆相离; 当 P 点在椭圆上时, 直线 l 与椭圆相切; 当 P 点在椭圆外部时, 直线 l 与椭圆相交.

147. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的性质:

- 在椭圆外一点向椭圆做两条切线, 切线夹角保持为 $\frac{\pi}{2}$ 时, 切线交点的轨迹方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$ (蒙日圆, 外准圆)

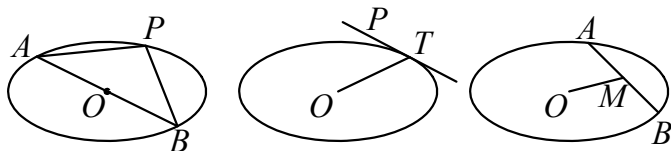
- 从椭圆中心 O 引出两条相互垂直的向径, 与椭圆分别交于 P, Q 两点, 从 O 点向 PQ 作垂线, 垂足为 H , 那么 H 点的轨迹也是一个圆 (内准圆), 圆的方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$. 斜边长度 $|PQ|$ 的取值范围是:

$$\underline{\hspace{2cm}} \leq |PQ| \leq \underline{\hspace{2cm}}$$

ΔOPQ 的面积取值范围是:

$$\underline{\hspace{2cm}} \leq S_{\Delta OPQ} \leq \underline{\hspace{2cm}}$$

- 以下三种情形, 斜率之积为定值.



$$k_{AP} \cdot k_{BP} = k_{OT} \cdot k_{PT} = k_{OM} \cdot k_{AB} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

- AB, CD 是椭圆的两条相交弦, 交点为 P , 且 AB, CD 的斜率互为相反数, 则 $|PA| \cdot |PB| = \underline{\hspace{2cm}}$.

- * 椭圆上任意一点 $P(x_0, y_0)$, 过 P 点作两条相互垂直的直线, 这两条直线与椭圆的除 P 点之外的交点分别是 Q, R , 那么线段 QR 过定点

$$\left(\frac{(a^2 - b^2)x_0}{a^2 + b^2}, -\frac{(a^2 - b^2)y_0}{a^2 + b^2} \right)$$

- * 过椭圆内部一点 $M(x_0, y_0)$ 作椭圆的两条垂直弦 PQ, RS , 弦 PQ, RS 的中点分别为 K, L , 那么线段 KL 过定点

$$\left(\frac{a^2x_0}{a^2 + b^2}, \frac{b^2y_0}{a^2 + b^2} \right)$$

- 椭圆上任意一点 $P(x_0, y_0)$, 过 P 点作两条斜率互为相反数的直线, 这两条直线与椭圆的除 P 点之外的交点分别是 Q, R , 那么直线 QR 的斜率是定值, 且与过 P 的切线的斜率互为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

- 在椭圆的长轴 AB 上有一定点 $M(m, 0)$, 过点 M 作椭圆的弦 CD , 记直线 AC, BD 的斜率分别为 k_1, k_2 , 则
 - $\frac{k_1}{k_2}$ 是定值;
 - AC, BD 延长线的交点的轨迹方程是 _____, 即点 M 关于椭圆的极线;
 - 设②中的极线与 AB 延长线的交点为 H , 则 CH, DH 的斜率互为 _____。

- P 为椭圆上一点, F_1, F_2 是椭圆的左右焦点, $\angle F_1PF_2 = \theta$, 则 $S_{\Delta F_1PF_2} = \underline{\hspace{2cm}}$.
- F_1, F_2 是椭圆的两个焦点, 椭圆上一点 P 处的切线 PT 平分 ΔPF_1F_2 在点 P 处的外角。焦点在直线 PT 上的投影点的轨迹是以长轴为直径的圆。以 PF_1 (或 PF_2) 为直径的圆必与以长轴为直径的圆 _____。
- 设椭圆的左右两个顶点为 $A_1(-a, 0), A_2(a, 0)$, 与 y 轴平行的直线交椭圆于 P_1, P_2 时, A_1P_1 与 A_2P_2 的交点的轨迹方程是 _____。

148. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的性质:

- 从不在双曲线上的一点做双曲线的两条切线, 如果两条切线垂直, 那么切线交点的轨迹也是一个圆 (蒙日圆, 外准圆), 圆的方程为 _____。
- 从双曲线的中心 O 引出两条相互垂直的向径, 与双曲线分别交于 P, Q 两点, 从 O 点向 P, Q 作垂线, 垂足为 H , 那么 H 点的轨迹也是一个圆 (内准圆), 内准圆的方程是 _____。双曲线内准圆存在的充要条件是虚轴大于实轴, 即离心率大于 $\sqrt{2}$ 。
- * 双曲线上任意一点 $P(x_0, y_0)$, 过 P 点作两条相互垂直的直线, 这两条直线与双曲线的除 P 点之外的交点分别是 Q, R , 那么线段 QR 过定点。

$$\left(\frac{(a^2 + b^2)x_0}{a^2 - b^2}, -\frac{(a^2 + b^2)y_0}{a^2 - b^2} \right)$$

必须满足 $a \neq b$, 定点才存在。

- * 过平面上任意一点 $M(x_0, y_0)$ 作双曲线的两条垂直弦 PQ, RS , 弦 PQ, RS 的中点分别为 K, L , 那么线段 KL 过定点。

$$\left(\frac{a^2 x_0}{a^2 - b^2}, -\frac{b^2 y_0}{a^2 - b^2} \right)$$

必须满足 $a \neq b$, 定点才存在。

- 双曲线上任意一点 $P(x_0, y_0)$, 过 P 点作两条斜率互为相反数的直线, 这两条直线与双曲线的除 P 点之外的交点分别是 Q, R , 那么直线 QR 的斜率是定值, 且与过 P 的切线的斜率互为 _____。

- P 为双曲线上一点, F_1, F_2 是双曲线的左右焦点, $\angle F_1PF_2 = \theta$, 则 $S_{\Delta F_1PF_2} = \underline{\hspace{2cm}}$.
- 设 $k > 0$, 则等轴双曲线 $y = \frac{k}{x}$ 的实半轴和虚半轴的长度均为 _____, 焦点坐标是 _____。

149. 抛物线 $y^2 = 2px$ 的性质:

- 抛物线的焦点为 F , 顶点为 O , 过焦点的直线与抛物线交于 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ 两点, 则

$$\frac{1}{|FP|} + \frac{1}{|FQ|} = \frac{1 - \cos \theta}{p} + \frac{1 - \cos \theta}{p} = \underline{\hspace{2cm}};$$

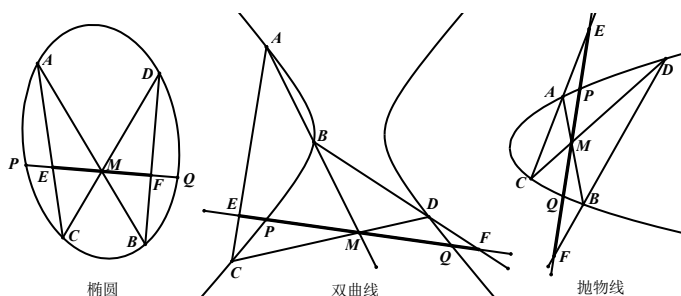
$$|FP| + |FQ| = \frac{p}{1 - \cos \theta} + \frac{p}{1 + \cos \theta} = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$y_1 y_2 = \underline{\hspace{2cm}}, \quad x_1 x_2 = \frac{y_1^2}{2p} \cdot \frac{y_2^2}{2p} = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$S_{\Delta OPQ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{2} \cdot \left(\frac{2p}{\sin^2 \theta} \cdot \sin \theta \right) = \underline{\hspace{2cm}}.$$
- 抛物线的对称轴上有一个固定点 $M(x_0, 0)$, 过 M 的直线与抛物线交于 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ 两点, 则

$$y_1 y_2 = \underline{\hspace{2cm}}, \quad x_1 x_2 = \frac{y_1^2}{2p} \cdot \frac{y_2^2}{2p} = \underline{\hspace{2cm}}.$$
- 抛物线的顶点为 O, A, B 两点在抛物线上, 若 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -p^2$, 则直线 AB 过定点 _____。
- 从准线上的一点 $P\left(-\frac{p}{2}, y_0\right)$ 向抛物线作两条切线, 设切点分别为 Q, R , 则这两条切线 PQ, PR 相互 _____。设抛物线焦点为 F , 那么 QR 恒过 _____, 且 $PF \perp \underline{\hspace{2cm}}$ 。
- 抛物线上任意一点 $P(x_0, y_0)$, 过 P 点作两条相互垂直的直线, 这两条直线与抛物线的除 P 点之外的交点分别是 Q, R , 那么线段 QR 过定点 _____。
- 抛物线上任意一点 $P(x_0, y_0)$, 过 P 点作两条斜率互为相反数的直线, 这两条直线与抛物线的除 P 点之外的交点分别是 Q, R , 那么直线 QR 的斜率是定值, 且与过 P 的切线的斜率互为 _____。

150. * 蝴蝶定理: 在圆锥曲线中, 过弦 PQ 的中点 M 任作两条弦 AB, CD , 直线 AC, BD 交 PQ 于点 E, F , 则 $ME = EF$ 。



12 零散考点

151. $\pi \approx 3.141592653$ 的分数近似值:

$$\frac{22}{7} \approx 3.142857, \quad \frac{355}{113} \approx 3.14159292.$$

152. 三次方程韦达定理: ($a \neq 0$),

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$x_1x_2x_3 = \underline{\hspace{2cm}}.$$

153. 因式分解:

$$a^3 \pm b^3 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$a^4 - b^4 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$= (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$$

$$a^n - b^n = (a - b)(\underline{\hspace{2cm}})$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc =$$

$$\underline{\hspace{2cm}}$$

154. 锥体 (圆锥、棱锥) 体积公式: $V = \underline{\hspace{2cm}}$,
 S 为底面积, h 为锥体高度。

155. 圆台或棱台的体积: $V = \underline{\hspace{2cm}}$,
 S, S' 为两个底面积, h 为台体高度 (两个底面间的距离)。

156. 球的表面积 $S = \underline{\hspace{2cm}}$, 球的体积 $V = \underline{\hspace{2cm}}$.