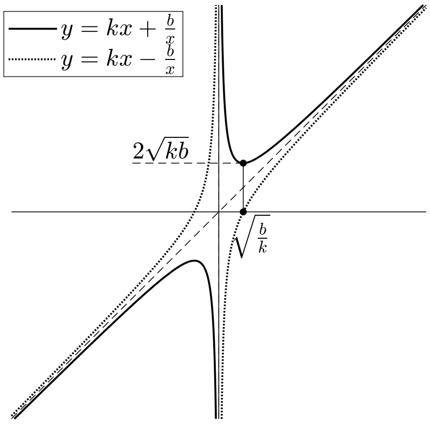
带 * 表示难度较大或者不方便设置待填空白的知识点。

1 函数

1. 求 $y=\dfrac{Ax+B}{Cx+D}$ $(AD-BC\neq 0)$ 的值域：

$$\underline{y=\frac{A}{C}\cdot\frac{x+\frac{D}{C}-\frac{D}{C}+\frac{B}{A}}{x+\frac{D}{C}}=\frac{A}{C}\cdot\left(1+\frac{-\frac{D}{C}+\frac{B}{A}}{x+\frac{D}{C}}\right)}\ .$$

2. 设 $k>0,\ b>0$，则 $y=kx+\dfrac{b}{x}$ 与 $y=kx-\dfrac{b}{x}$ 的图像如下，这两种函数都是双曲线，



当 $x>0$ 时，$y=kx+\dfrac{b}{x}$ 在 $x=\underline{\sqrt{\dfrac{b}{k}}}$ 处取得极小值 $\underline{2\sqrt{kb}}$；$y=kx-\dfrac{b}{x}$ 的零点是 $x=\underline{\sqrt{\dfrac{b}{k}}}$.

3. 求 $y=\dfrac{x^2+Ax+B}{x+C}$ ①或 $y=\dfrac{x+C}{x^2+Ax+B}$ ②的值域(若分子或分母的最高次项系数不为 1，则先将系数提取出来)，方法一：换元 $\underline{t=x+C}$；
方法二：$\underline{\text{判别式}}$，以①式为例写出主要过程：

$$y(x+C)=x^2+Ax+B$$

$$x^2+(A-y)x+B-yC=0$$

$$\Delta=(A-y)^2-4(B-yC)\geqslant 0$$

要绘制①或②的图像，可以先绘制 $y=(x^2+Ax+B)(x+C)$ 的图像，因为这个三次函数的正负号与①或②式的正负号是一致的。

4. 求 $y=\dfrac{\sqrt{Ax^2+B}}{Cx^2+D}$ 的值域，先提取系数，
$y=\dfrac{\sqrt{A}}{C}\cdot\dfrac{\sqrt{x^2+\frac{B}{A}}}{x^2+\frac{D}{C}}$，换元，$t=\underline{\sqrt{x^2+\dfrac{B}{A}}}$，那么 $x^2=t^2-\dfrac{B}{A}$，

$$y=\frac{\sqrt{A}}{C}\cdot\frac{t}{t^2-\frac{B}{A}+\frac{D}{C}}=\frac{\sqrt{A}}{C}\cdot\frac{1}{t+\left(\frac{D}{C}-\frac{B}{A}\right)\frac{1}{t}}$$

5. $y=|x-b_1|+|x-b_2|+\cdots+|x-b_n|$，假设 $b_1<b_2<\cdots<b_n$，如果 n 是偶数，那么最小值在区间 $\underline{[b_{\frac{n}{2}},b_{\frac{n}{2}+1}]}$ 内取得；如果 n 是奇数，那么最小值在 $\underline{x=b_{\frac{n+1}{2}}}$ 处取得。

6. 恒成立问题或有解问题 (∃ 表示存在，∀ 表示任意。$f(x)_{\max},f(x)_{\min}$ 分别表示 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上的最大值、最小值。)

$$\exists\, x_0\in(a,b),\ f(x_0)>m\ \Rightarrow\ \underline{f(x)_{\max}>m}$$

$$\exists\, x_0\in(a,b),\ f(x_0)<m\ \Rightarrow\ \underline{f(x)_{\min}<m}$$

$$\forall\, x\in(a,b),\ f(x)<m\ \Rightarrow\ \underline{f(x)_{\max}<m}$$

$$\forall\, x\in(a,b),\ f(x)>m\ \Rightarrow\ \underline{f(x)_{\min}>m}$$

7. 对数运算法则：
$\log_a(MN)=\underline{\log_a M+\log_a N}$.
$\log_a\left(\dfrac{M}{N}\right)=\underline{\log_a M-\log_a N}$.
$\log_a M^n=\underline{n\log_a M}$，　$\log_{a^n}M=\underline{\dfrac{1}{n}\log_a M}$.
换底公式：$\log_a M=\underline{\dfrac{\log_b M}{\log_b a}}$.

8. 常见函数方程：

$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$	$\underline{kx}$
$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$	$\underline{kx+b}$
$f(x_1x_2)=f(x_1)f(x_2)$	$\underline{x^\alpha}$
$f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2)$	$\underline{a^x}$
$f(x_1x_2)=f(x_1)+f(x_2)$	$\underline{\log_a x}$
$f(x_1x_2)=x_2f(x_1)+x_1f(x_2)$	$\underline{x\log_a x}$
$f(x_1+x_2)+f(x_1-x_2)=2\lambda f(x_1)f(x_2)$	$\underline{\frac{1}{\lambda}\cos x}$
$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)+2\lambda x_1x_2$	$\underline{\lambda x^2+\mu x}$

9. * $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ 或 $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$，则

$$f(x_1)+f(x_2)=f\left(\underline{\frac{x_1+x_2}{1+x_1x_2}}\right)$$

10. 函数凹凸性，填“$<$”或“$>$”，请结合图像记忆。
$x_1,x_2\in(0,\pi),\ x_1\neq x_2$，

$$\frac{1}{2}(\sin x_1+\sin x_2)\ \underline{<}\ \sin\frac{x_1+x_2}{2}$$

$x_1,x_2\in(0,\dfrac{\pi}{2}),\ x_1\neq x_2$，

$$\frac{1}{2}(\tan x_1+\tan x_2)\ \underline{>}\ \tan\frac{x_1+x_2}{2}$$

$x_1,x_2\in\mathbf{R},\ x_1\neq x_2$，

$$\frac{\mathrm{e}^{x_1}+\mathrm{e}^{x_2}}{2}\ \underline{>}\ \mathrm{e}^{\frac{x_1+x_2}{2}}$$

$x_1, x_2 \in (0, +\infty)$，$x_1 \neq x_2$，

$$\frac{\ln x_1 + \ln x_2}{2} \underline{<} \ln \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$x_1, x_2 \in (0, +\infty)$，$x_1 \neq x_2$，$\alpha \in \mathbf{R}$，$\alpha > 1$，

$$\frac{x_1^\alpha + x_2^\alpha}{2} \underline{>} \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^\alpha$$

11. 若 $f(x)$ 满足 $f(x) = \pm\dfrac{1}{f(x+a)}$，那么 $f(x)$ 的一个周期是 $\underline{2a}$.

12. 若 $f(x)$ 满足 $f(x+a) = f(b-x)$，则 $f(x)$ 的一条对称轴是 $\underline{x = \dfrac{a+b}{2}}$.

13. 如果 $f(x)$ 同时具有对称轴 $x = a$ 和对称中心 (b, c)，且 $a \neq b$，那么 $f(x)$ 具有周期 $T = \underline{4|a-b|}$.

14. 三变量均值不等式：设 $a, b, c \geqslant 0$，则 $\dfrac{a+b+c}{3} \geqslant \underline{\sqrt[3]{abc}}$.

15. 设 $a, b > 0, x > 0$，利用上面的三变量均值不等式，有：
$ax^2 + \dfrac{b}{x} = ax^2 + \dfrac{b}{2x} + \dfrac{b}{2x} \geqslant \underline{3\sqrt[3]{\dfrac{ab^2}{4}}}$；
$ax + \dfrac{b}{x^2} = \dfrac{1}{2}ax + \dfrac{1}{2}ax + \dfrac{b}{x^2} \geqslant \underline{3\sqrt[3]{\dfrac{a^2b}{4}}}$.

16. 零点存在定理：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 连续，且 $f(a) \cdot f(b) \underline{< 0}$，则一定存在 $x_0 \in (a, b)$，使 $f(x_0) = 0$. 此定理为二分法找函数零点的理论基础。

17. * 记 $f_0(x) = x$，$f_1(x) = f(x)$，$f_{n+1}(x) = f(f_n(x))$. 称 $f_n(x)$ 为函数 $f(x)$ 的 n 次迭代 (用数学归纳法证明) 。

$f(x)$	$f_n(x)$
$x + 2\sqrt{x} + 1$	$(\sqrt{x} + n)^2$
$\dfrac{x}{a + bx}$	$\dfrac{x}{a^n + \dfrac{1-a^n}{1-a}bx}$
$\sqrt[k]{ax^k + b}$	$\sqrt[k]{a^n x^k + \dfrac{1-a^n}{1-a}b}$
$x^2 + 2x$	$(x+1)^{2^n} - 1$
$\dfrac{x^2}{2x-1}$	$\dfrac{x^{2^n}}{x^{2^n} - (x-1)^{2^n}}$

18. $f_1(x) = f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$，$f_{n+1}(x) = f(f_n(x))$，$n \in \mathbf{N}^+$，$k \in \mathbf{N}$，则 $f_{4k+1}(x) = \underline{\dfrac{1+x}{1-x}}$，$f_{4k+2}(x) = \underline{-\dfrac{1}{x}}$，$f_{4k+3}(x) = \underline{\dfrac{x-1}{x+1}}$，$f_{4k+4}(x) = \underline{x}$.

2 排列、组合与二项式定理

19. 排列数：$P_n^k = \underline{\dfrac{n!}{(n-k)!}}$，或者写成 A_n^k.

20. 组合数：$C_n^k = C_n^{n-k} = \underline{\dfrac{n!}{k!(n-k)!}}$.
递推关系：$C_n^k + C_n^{k-1} = \underline{C_{n+1}^k}$.

21. 二项式定理：$(a+b)^n = \underline{\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}}$.

22. $(a+b+c)^2 = \underline{a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)}$.
$(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})^2$ 的结果类似。

23. 杨辉三角：

$$\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
\underline{1 \quad 3 \quad 3 \quad 1} \\
\underline{1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1} \\
\underline{1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1} \\
\underline{1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1}
\end{array}$$

第 $n+1$ 行的系数之和为 $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k = \underline{2^n}$.

24. * 偶数件不同物品中选出奇数件物品的方法数 C_{2n}^1，C_{2n}^3，$C_{2n}^5, \cdots$ 都是 $\underline{\text{偶}}$ 数。(填“奇”或“偶”)

25. * 组合恒等式：
$\sum\limits_{k=r}^{n} C_k^r = \underline{C_{n+1}^{r+1}}$，$\sum\limits_{k=0}^{r} C_m^k C_n^{r-k} = \underline{C_{n+m}^r}$
$\sum\limits_{k=1}^{n} kC_n^k = \underline{n \cdot 2^{n-1}}$，$\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 C_n^k = \underline{n(n+1) \cdot 2^{n-2}}$

26. * 设 n 个元素错排的方案数为 D_n，$D_1 = 0$，$D_2 = 1$，则

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$$
$$D_n - nD_{n-1} = -[D_{n-1} - (n-1)D_{n-2}] = (-1)^n$$
$$\frac{D_n}{n!} - \frac{D_{n-1}}{(n-1)!} = \frac{(-1)^n}{n!}$$
$$D_n = n!\left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right]$$

27. $\left(ax^\alpha + bx^\beta\right)^n$ 展开式的通项为

$$T_{r+1} = C_n^r a^{n-r} b^r x^{(n-r)\alpha + r\beta},$$

设 $C_n^m a^{n-m} b^m$ 是最大的系数，则

$$\begin{cases} C_n^m a^{n-m} b^m \geqslant \underline{C_n^{m-1} a^{n-m+1} b^{m-1}} \\ C_n^m a^{n-m} b^m \geqslant \underline{C_n^{m+1} a^{n-m-1} b^{m+1}} \end{cases}$$

3 概率论与数理统计

28. 给定正整数集合 $S=\{k_1,k_2,\cdots,k_n\}$，定义多项式 $f(x)=(1+x^{k_1})(1+x^{k_2})\cdots(1+x^{k_n})$，则 $f(x)$ 的展开式中，$\underline{x^m \text{ 的系数}}$ 恰好等于从集合 S 中选出元素总和为 m $(m\in\mathbf{N})$ 的子集的方法数。

29. 数学期望 (或均值) 的定义：$E(X)=\underline{\sum\limits_{i=1}^{n}x_ip_i}$，
性质：$E(aX+b)=\underline{aE(X)+b}$.
方差：$D(X)=E\{[X-E(X)]^2\}=\underline{E(X^2)-[E(X)]^2}$，
性质：$D(aX+b)=\underline{a^2D(X)}$.

30. 伯努利大数定律：独立地重复一个伯努利试验 n 次，当 n 很大时，频率逼近$\underline{\text{概率}}$。

31. 概率加法公式：

$$P(A_1\cup A_2)=\underline{P(A_1)+P(A_2)-P(A_1\cap A_2)}$$

32. 条件概率公式：$P(B\mid A)=\underline{\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}}$.
概率乘法公式：$P(A\cap B)=\underline{P(A)P(B|A)}$.
若 A,B 相互独立，则 $P(A\cap B)=\underline{P(A)P(B)}$.

33. 全概率公式：$P(A)=\underline{\sum\limits_{k=1}^{n}P(A\mid\Omega_k)P(\Omega_k)}$.

34. * 贝叶斯公式：

$$P(\Omega_i\mid A)=\underline{\frac{P(A\mid\Omega_i)P(\Omega_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n}P(A\mid\Omega_k)P(\Omega_k)}}$$

35. 二项分布 $b(n,p)$：每次实验时，事件 A 发生的概率为 p，那么在 n 次实验中事件 A 发生 k 次的概率为 $P\{X=k\}=\underline{C_n^kp^k(1-p)^{n-k}}$. 数学期望为$\underline{np}$，方差为$\underline{np(1-p)}$.

36. * 几何分布：在 n 次伯努利试验中，试验 k 次才得到第一次成功的概率，$P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p$, $k\in\mathbf{N}^+$, $0<p<1$. 数学期望为 $\underline{\dfrac{1}{p}}$，方差为 $\underline{\dfrac{1-p}{p^2}}$.

37. 超几何分布：共有 N 件产品，其中有 $D(D\leqslant N)$ 件次品，从中任取 $n(n\leqslant N)$ 件，其中恰有 $k(k\leqslant D)$ 件次品的概率：$P\{X=k\}=\underline{\dfrac{C_D^kC_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}}$. 数学期望为 $\underline{\dfrac{nD}{N}}$，方差为 $\dfrac{nD}{N}\left(1-\dfrac{D}{N}\right)\left(\dfrac{N-n}{N-1}\right)$.

38. 正态分布：$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，$\mu\in\mathbf{R}$，$\sigma>0$. 数学期望为 $\underline{\mu}$，方差为 $\underline{\sigma^2}$. 若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim\underline{N(0,1)}$ (标准正态分布).

39. 最小二乘法，回归直线 $\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$.

$$\hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\,\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}$$

$$=\frac{n\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n}y_i\right)}{n\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^2}$$

$$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$$

回归直线通过散点图的几何中心 $(\overline{x},\overline{y})$.

40. 样本相关系数

$$r=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}\cdot\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}$$

$$=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\,\overline{y}}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}\cdot\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2-n\overline{y}^2}}$$

$$=\frac{n\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n}y_i\right)}{\sqrt{n\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^2}\cdot\sqrt{n\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}y_i\right)^2}}$$

4 三角函数

41. 正余弦和角、差角公式：

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\underline{\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta}$$

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\underline{\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta}$$

42. 二倍角公式：

$$\sin2x=\underline{2\sin x\cos x}$$

$$\cos2x=\underline{2\cos^2x-1=1-2\sin^2x=\cos^2x-\sin^2x}$$

43. * 三倍角公式：

$$\sin3x=\underline{-4\sin^3x+3\sin x}$$

$$\cos3x=\underline{4\cos^3x-3\cos x}$$

44. 余弦的递推关系：

$$\cos(n+1)\theta=2\cos\theta\cos n\theta-\underline{\cos(n-1)\theta}$$

45. 和差化积:

$$\sin x+\sin y=\underline{2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}$$

$$\cos x+\cos y=\underline{2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}$$

46. 积化和差:

$$\sin x\sin y = \underline{\frac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)]}$$
$$\cos x\cos y = \underline{\frac{1}{2}[\cos(x-y)+\cos(x+y)]}$$
$$\sin x\cos y = \underline{\frac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)]}$$

47. 辅助角公式：

$$a\sin x+b\cos x = \underline{\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)} \qquad \left(\tan\varphi=\frac{b}{a}\right)$$

变体一：

$$a\sin x+b\cos(x+x_0) = \underline{a\sin x+b\cos x\cos x_0-b\sin x\sin x_0}$$

变体二：

$$a\cos^2 x+b\sin^2 x+c\sin x\cos x = \underline{a\frac{\cos 2x+1}{2}+b\frac{-\cos 2x+1}{2}+\frac{c}{2}\sin 2x}$$

变体三：

$$a\sin^2 x+b\cos x = \underline{a(1-\cos^2 x)+b\cos x}$$

48. *

$$\sum_{k=1}^{n}\cos kx = \underline{\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}}$$
$$\sum_{k=1}^{n}\sin kx = \underline{\frac{-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}}$$

49. * $\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n} = \underline{\dfrac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}}$.

50. * ΔABC 中的恒等式 $(A+B+C=\pi)$:

$\sin A+\sin B+\sin C = \underline{4\cos\left(\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{B}{2}\right)\cos\left(\frac{C}{2}\right)}$

$\cos A+\cos B+\cos C = \underline{1+4\sin\left(\frac{A}{2}\right)\sin\left(\frac{B}{2}\right)\sin\left(\frac{C}{2}\right)}$

$\tan A+\tan B+\tan C = \underline{\tan A\tan B\tan C}$

$\tan\left(\frac{A}{2}\right)\tan\left(\frac{B}{2}\right)+\tan\left(\frac{B}{2}\right)\tan\left(\frac{C}{2}\right)+$
$\tan\left(\frac{A}{2}\right)\tan\left(\frac{C}{2}\right) = \underline{1}$

51. 对于 ΔABC，考虑 $A=B=C=\frac{\pi}{3}$ 的特殊情形，以及两个角趋近于 0，第三个角趋近于 π 时的极限 (或者一个角趋近于 0，剩余两个角趋近于 $\frac{\pi}{2}$)，有

$$\underline{0}<\sin A+\sin B+\sin C\leqslant\underline{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$$
$$\underline{0}<\sin A\sin B\sin C\leqslant\underline{\frac{3\sqrt{3}}{8}}$$
$$\underline{1}<\cos A+\cos B+\cos C\leqslant\underline{\frac{3}{2}}$$
$$\underline{-1}<\cos A\cos B\cos C\leqslant\underline{\frac{1}{8}}$$

52. * 双曲正弦函数 $\sinh x = \underline{\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}}$，
反双曲正弦函数 $\operatorname{arcsinh} x = \underline{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}$；
双曲余弦函数 $\cosh x = \underline{\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}}$，
反双曲余弦函数 $\operatorname{arccosh} x = \underline{\ln(x+\sqrt{x^2-1})}$.
求导：$(\sinh x)' = \underline{\cosh x}$；$(\cosh x)' = \underline{\sinh x}$.
$(\text{arcsinh}x)' = \underline{\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}}$；$(\text{arccosh}x)' = \underline{\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}}$.
平方差关系：$(\cosh x)^2-(\sinh x)^2 = \underline{1}$.

5 复数

53. 虚数单位 i 的整数次幂的周期性：
$i^{4n} = \underline{1}$，$i^{4n+1} = \underline{i}$，$i^{4n+2} = \underline{-1}$，$i^{4n+3} = \underline{-i}$.

54. 共轭复数的性质：
$\overline{\overline{z}} = \underline{z}$，$\overline{z_1\pm z_2} = \underline{\overline{z_1}\pm\overline{z_2}}$，
$\overline{z_1\cdot z_2} = \underline{\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}}$，$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \underline{\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}}$.

55. 复数的模的性质：
$|z| = \underline{|\overline{z}|}$，$z\overline{z} = \underline{|z|^2=|\overline{z}|^2}$，
$|z_1z_2| = \underline{|z_1||z_2|}$，$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \underline{\dfrac{|z_1|}{|z_2|}}$，
$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2 = \underline{2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)}$.

56. 三角不等式：$\underline{||z_1|-|z_2||}\leqslant|z_1\pm z_2|\leqslant\underline{|z_1|+|z_2|}$.

57. 去掉 $\sqrt{A+B\sqrt{C}}$ $(A>0,C>0)$ 的外层根号的方法：设 $\sqrt{A+B\sqrt{C}} = x+y\sqrt{C}$，两边平方，然后比较左右两边 $\sqrt{C}$ 的系数和另一项，可得到两个方程：$\underline{A=x^2+y^2C,\ B=2xy}$. 根据基本不等式，$A\geqslant\underline{|B|\sqrt{C}}$ 是可以去掉外层根号的必要不充分条件。

58. 去掉 $\sqrt{a+bi}$ 的根号的方法：设 $\sqrt{a+bi}=x+yi$，两边平方，然后比较左右两边的实部和虚部，可得到两个方程：$\underline{a=x^2-y^2,\ b=2xy}$.

59. * 欧拉公式 $e^{ix} = \underline{\cos x+i\sin x}$.

60. * 自然对数的底数 $e=2.718281828\cdots$ 的定义：

$$e = \underline{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

61. $\cos(n\theta)+\mathrm{i}\sin(n\theta)=(\underline{\ \cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta\ })^n$，将等号右边用二项式定理展开后，比较左右两边的实部和虚部，即可得到任意的 n 倍角公式。

62. * $(x+\mathrm{i}y)(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$
$=\underline{(x\cos\theta-y\sin\theta)+\mathrm{i}(x\sin\theta+y\cos\theta)}$ (坐标旋转公式).

6 向量

63. 零向量具有任意方向。

64. $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$，两者的数量积（“点乘”）定义为
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\underline{\ a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\ }$$
$\vec{a},\vec{b}$ 的夹角的余弦为
$$\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\underline{\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}}$$

65. 二阶行列式：$\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}=\underline{\ a_1b_2-a_2b_1\ }$.

66. $\vec{a}\perp\vec{b}$ 的充要条件是$\underline{\ a_1b_1+a_2b_2=0\ }$.
$\vec{a}//\vec{b}$ 的充要条件是$\underline{\ a_1b_2-a_2b_1=0\ }$.

67. 向量基本定理：如果 $\vec{e_1}$ 与 $\vec{e_2}$ 是平面上两个不平行的向量，那么该平面上的任意向量 $\vec{a}$，都可唯一地表示为 $\vec{e_1}$ 与 $\vec{e_2}$ 的线性组合，即存在唯一的一对实数 λ 与 μ，使得 $\underline{\ \vec{a}=\lambda\vec{e_1}+\mu\vec{e_2}\ }$.

68. 平面上有不同的四点 O,P,Q,R，设 $\overrightarrow{OR}=\lambda\overrightarrow{OP}+\mu\overrightarrow{OQ}$，则 P,Q,R 三点共线的充要条件是 $\underline{\ \lambda+\mu=1\ }$.

7 解三角形

69. 外心：三条<u>中垂</u>线的交点；
内心：三条<u>角平分</u>线的交点；
重心：三条<u>中</u>线的交点；
垂心：三条<u>垂</u>线的交点。

70. 对于 ΔABC，重心 G 分割中线的比例为 $\underline{1{:}2}$.
设 O 为空间中的任意一点，则
$$\overrightarrow{OG}=\underline{\frac{1}{3}}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$$

71. 正弦定理：
$$\underline{\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R}$$
R 为三角形外接圆半径。

72. 余弦定理：
$$\begin{aligned}c^2&=a^2+b^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}\\&=\underline{\ a^2+b^2-2ab\cos C\ }\\ \vec{a}\cdot\vec{b}&=\underline{\frac{a^2+b^2-c^2}{2}}\\ \cos C&=\underline{\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}\end{aligned}$$

73. 对任意三角形，“大边”是”大角”的充要条件。

74. * 对于 ΔABC，
$$a+b+c\geqslant 2(a\cos A+b\cos B+c\cos C)$$
将三个余弦定理的式子相加可得：
$$a^2+b^2+c^2=2bc\cos A+2ac\cos B+2ab\cos C$$
将上式中的 a,b,c 换成任意实数 x,y,z，同时保持 $A+B+C=\pi$，那么有嵌入不等式
$$x^2+y^2+z^2\geqslant\underline{\ 2yz\cos A+2zx\cos B+2xy\cos C\ }$$

75. $(a^2-b^2)^2+(2ab)^2=(\underline{\ a^2+b^2\ })^2$，具有勾股定理的形式。让 $a,b(a\neq b)$ 取正整数，就能得到勾股数，比如 $(3,4,5)$，$(5,12,13)$，$(7,24,25)$，$(8,15,17)$，$(9,40,41)$，$(11,60,61)$，$(20,21,29)$.

76. 把上一条中的 a^2 换成 $\vec{a}$，b^2 换成 $\vec{b}$，实数乘法换成向量点乘，就得到向量的极化恒等式：
$$\underline{\ 4\vec{a}\cdot\vec{b}=(\vec{a}+\vec{b})^2-(\vec{a}-\vec{b})^2\ }$$

77. 对于 ΔABC，R 为外接圆半径，r 为内切圆半径，$p=\dfrac{a+b+c}{2}$ 为三角形周长的一半，三角形的面积公式有：
两边夹角：$\underline{\ \frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B\ }$.
只含 R,A,B,C：$\underline{\ 2R^2\sin A\sin B\sin C\ }$.
只含 R,a,b,c：$\underline{\ \frac{abc}{4R}\ }$.
只含 p,r：$\underline{\ pr\ }$.
只含 p,a,b,c：$\underline{\ \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\ }$.

78. r 为内切圆半径，则 $r=\underline{\ \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}\ }$.

79. * ΔABC 的<u>费马点</u>：分别以 AB,BC,AC 为边，在 ΔABC 外部 (或内部) 作三个等边三角形，这三个等边三角形的外接圆会交于同一点，即费马点。当三角形的最大内角小于 120° 时，费马点位于三角形内部，设费马点与三个顶点连线长度分别为 x,y,z，则
$$xy+yz+zx=\frac{4}{\sqrt{3}}S_{\Delta ABC}\leqslant\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)$$

80. * ΔABC 内部有任意一点 O，记 ΔAOB，ΔBOC，ΔCOA 的面积分别为 S_C, S_A, S_B，那么有：

$$S_A \cdot \underline{\overrightarrow{OA}} + S_B \cdot \underline{\overrightarrow{OB}} + S_C \cdot \underline{\overrightarrow{OC}} = \overrightarrow{0}$$

◇ 当 O 是 ΔABC 的重心时，

$$S_A : S_B : S_C = \underline{1:1:1}$$

◇ 当 O 是 ΔABC 的垂心时，

$$S_A : S_B : S_C = \underline{\tan A : \tan B : \tan C}$$

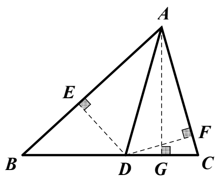
◇ 当 O 是 ΔABC 的内心时，

$$S_A : S_B : S_C = \underline{a : b : c}$$

◇ 当 O 是 ΔABC 的外心时，

$$S_A : S_B : S_C = \underline{\sin 2A : \sin 2B : \sin 2C}$$

81. D 是 ΔABC 的 BC 边上的一点，则 $\dfrac{|AB|}{|AC|} = \dfrac{|BD|}{|CD|}$ 的充分必要条件是：AD 是 $\underline{\angle BAC \text{ 的角平分线}}$。



8 导数与积分

82. 基本初等函数的导数公式：
$(x^\alpha)' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}}$，$(\ln x)' = \underline{\frac{1}{x}}$，
$(a^x)' = \underline{(\ln a)a^x}$，$(e^x)' = \underline{e^x}$，
$(\sin x)' = \underline{\cos x}$，$(\cos x)' = \underline{-\sin x}$，
$(\tan x)' = \underline{\dfrac{1}{\cos^2 x}}$.

83. 导数运算法则：

$$[c_1 f(x) + c_2 g(x)]' = \underline{c_1 f'(x) + c_2 g'(x)}$$
$$[f(x) \cdot g(x)]' = \underline{f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}$$
$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \underline{\frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}}$$

84.

$$[f(x) \cdot x^n]' = \underline{x^n f'(x) + n x^{n-1} f(x)}$$
$$\left[\frac{f(x)}{x^n}\right]' = \underline{\frac{x f'(x) - n f(x)}{x^{n+1}}}$$

85. 复合函数求导法则：$[g(f(x))]' = g'(u) f'(x)$，再将 u 换回 $f(x)$. 比如 $[\ln f(x)]' = \underline{\dfrac{f'(x)}{f(x)}}$.

86. 设 $f(x) = (x - x_0)^n g(x)$，两边取自然对数，有

$$\ln f(x) = n \ln(x - x_0) + \ln g(x)$$

两边求导，有

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \underline{\frac{n}{x - x_0} + \frac{g'(x)}{g(x)}}$$

87. 可导奇函数的导函数是 $\underline{\text{偶}}$ 函数；
可导偶函数的导函数是 $\underline{\text{奇}}$ 函数。

88. 把 $e^x \geqslant x + 1$ 中的 x 换成 $x - 1$，有 $e^{x-1} \geqslant x$，两边同乘 e，有 $\underline{e^x \geqslant ex}$.

89. 把 $e^x \geqslant x + 1$ 中的 x 换成 $-x$，有 $e^{-x} \geqslant -x + 1$，当 $x < 1$ 时，两边同时取倒数，有 $e^x \leqslant \underline{\dfrac{1}{1-x}}$.

90. x 换成 $\alpha x (\alpha > 0)$，有 $e^{\alpha x} \geqslant \alpha x + 1$，当 $1 + \alpha x > 0$ 时，两边同时开 α 次方，有 $e^x \geqslant \underline{(1 + \alpha x)^{\frac{1}{\alpha}}}$.

91. * e 是自然对数的底数，$n \in \mathbf{N}^+$，则

$$2 \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

92. 对于三次函数 $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$，对称中心的坐标为 $\underline{\left(-\dfrac{b}{3a}, f\left(-\dfrac{b}{3a}\right)\right)}$，对称中心也是三次函数的拐点 (二阶导数为 0，且二阶导数在此点左右异号)。

93. * 函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的泰勒 (Taylor) 级数

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots$$

当 $x_0 = 0$ 时，

$$e^x = \underline{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}} + \cdots$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$
$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \cdots$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots$$
$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2\left(\underline{x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1}} + \cdots\right)$$

94. 当 $|x| < 0.2$ 时，$\sqrt{1+x} \approx 1 + \dfrac{1}{2}x$ (x 可正可负). 而且 $|x|$ 越小，这个估算公式越精确。
$\sqrt{1.1} = 1.048808 \cdots \approx 1 + \dfrac{1}{2} \times 0.1 = 1.05$，
$\sqrt{73} = 8.544003 \cdots = \sqrt{64 + 9} = \sqrt{64\left(1 + \dfrac{9}{64}\right)} = \underline{8\sqrt{1 + \dfrac{9}{64}} \approx 8\left(1 + \dfrac{9}{2 \times 64}\right) = 8 + \dfrac{9}{2 \times 8} = 8\dfrac{9}{16}}$.

95. * 拉格朗日中值定理：如果函数 $f(x)$ 满足：(1) 在闭区间 $[x_1,x_2]$ 上连续；(2) 在开区间 (x_1,x_2) 内可导。
那么至少存在一点 $\xi\in(x_1,x_2)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$. (至少能作出一条和割线斜率相等的切线)。

96. * 小于等于 n 的全部正整数的 $1\sim 5$ 次方的求和结果：

$$1^1+2^1+3^1+\cdots+n^1=\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}$$
$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}$$
$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^4}{4}+\frac{n^3}{2}+\frac{n^2}{4}$$
$$1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4=\frac{n^5}{5}+\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30}$$
$$1^5+2^5+3^5+\cdots+n^5=\frac{n^6}{6}+\frac{n^5}{2}+\frac{5n^4}{12}-\frac{n^2}{12}$$

$1\sim n$ 的 k 次方求和结果是关于 n 的 $k+1$ 次多项式，多项式的系数从高次项到低次项依次为

$$\frac{1}{k+1},\ \frac{1}{2},\ \frac{k}{12},\ 0,\ -\frac{k(k-1)(k-2)}{720},\cdots$$

9 不等式

97. 糖水不等式：若 $0<b<a, c>0$，则 $\dfrac{b}{a}<\underline{\dfrac{b+c}{a+c}}$.

$$\frac{1}{a^k-1}\leqslant\underline{\frac{1+1}{a^k-1+1}=\frac{2}{a^k}}$$

98. 设 a,b,c,d 均大于 0，且 $\dfrac{a}{b}<\dfrac{c}{d}$，那么 $\dfrac{a}{b}<\dfrac{a+c}{b+d}<\dfrac{c}{d}$.

99. 设 $a>1$，当 $k\geqslant 1$ 时，$a^k-1\geqslant a^k-a^{k-1}=(a-1)a^{k-1}$，所以

$$\frac{1}{a^k-1}\leqslant\underline{\frac{1}{(a-1)a^{k-1}}}$$

100. * 伯努利不等式：当 $x>-1$ 时，
- 若 $\alpha>1$，则 $(1+x)^\alpha\ \underline{\geqslant}\ 1+\alpha x$;
- 若 $0<\alpha<1$，则 $(1+x)^\alpha\ \underline{\leqslant}\ 1+\alpha x$.

用数学归纳法或求导证明。

101. $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，

$$\underline{\frac{2}{\pi}x}<\sin x<\underline{x}<$$
$$x+\frac{x^3}{3}<\frac{3x}{3-x^2}<\tan x<\frac{x}{1-\frac{2}{\pi}x}$$

102. $x\in\mathbf{R}$，$\cos x\geqslant\underline{1-\dfrac{1}{2}x^2}$ (泰勒级数取前两项).
$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\cos x<1-\dfrac{4x^2}{\pi^2}$.

103. $x\in(0,1)$，$\mathrm{e}^{2x}<\dfrac{1+x}{1-x}$.
两边取自然对数，有 $2x<\underline{\ln\dfrac{1+x}{1-x}}$.
令 $t=\dfrac{1+x}{1-x}\in(1,+\infty)$，则 $x=\underline{\dfrac{t-1}{t+1}}$，上面的不等式变为 $\underline{\dfrac{2(t-1)}{t+1}<\ln t}$.

104. $t\in(1,+\infty)$，$\ln t<\underline{\sqrt{t}-\dfrac{1}{\sqrt{t}}}$.

105. 对任意两个不等的正实数 x_1,x_2，有

$$\sqrt{x_1x_2}<\frac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}<\frac{x_1+x_2}{2}$$

$\dfrac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}$ 称为对数平均值。把上式中的 x_1 换成 e^{x_1}，x_2 换成 e^{x_2}，可得：

$$\underline{\mathrm{e}^{\frac{x_1+x_2}{2}}<\frac{\mathrm{e}^{x_2}-\mathrm{e}^{x_1}}{x_2-x_1}<\frac{\mathrm{e}^{x_1}+\mathrm{e}^{x_2}}{2}}$$

106. 两变量均值不等式：

$$\underline{\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}}$$

107. 若 $x\in\mathbf{R}$，则 $\sqrt{x^2+4}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}\geqslant\underline{\dfrac{5}{2}}$.

108. * 柯西不等式：
$\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $\overrightarrow{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，那么

$$|\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}||\cos\theta|\leqslant|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|$$
$$|\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}|^2\leqslant|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2$$

把上式转化为坐标表示：

$$\underline{\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)}$$

109. $a,b,c\in\mathbf{R}$，因为 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geqslant 0$，所以，$a^2+b^2+c^2\geqslant\underline{ab+bc+ca}$.

110. 含根号的缩放：

$$\underline{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}>2\sqrt{k}>\underline{\sqrt{k+\frac{1}{2}}+\sqrt{k-\frac{1}{2}}}>$$
$$\underline{\sqrt{k+1}+\sqrt{k-1}}>\underline{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}$$

以上各项除 $2\sqrt{k}$ 外，取倒数后均可裂项。

111. 含平方的缩放：

$$\underline{k(k+1)}\geqslant k^2+1>k^2>\underline{\left(k-\frac{1}{2}\right)\left(k+\frac{1}{2}\right)}$$
$$>\underline{(k-1)(k+1)}\geqslant\underline{k(k-1)}$$

以上各项除 k^2+1 和 k^2 外，取倒数后均可裂项。

112. 正整数倒数求和缩放：

$$\underline{\ln(n+1)}<\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}<\underline{1+\ln n}$$

10 数列

113. 设 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列，S_n 是其前 n 项和，

- 若 $m+n=s+t$，则 $a_m+a_n=\underline{a_s+a_t}$；
- $S_{m+n}=S_m+S_n+\underline{mnd}$；
- $\dfrac{S_{2n-1}}{a_n}=\underline{2n-1}$；
- $m\neq n$，$\dfrac{S_m-S_n}{m-n}=\dfrac{S_{m+n}}{m+n}=\underline{\dfrac{d}{2}(m+n)+(a_1-\dfrac{d}{2})}$；
- $S_n, S_{2n}-S_n, S_{3n}-S_{2n}\cdots$ 是公差为 $\underline{n^2d}$ 的等差数列；
- 在前 $2n$ 项中，$\dfrac{\text{奇数项之和}}{\text{偶数项之和}}=\dfrac{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}}{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}}=\underline{\dfrac{a_n}{a_{n+1}}}$；
- 在前 $2n+1$ 项中，$\dfrac{\text{奇数项之和}}{\text{偶数项之和}}=\dfrac{a_1+a_3+\cdots+a_{2n+1}}{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}}=\underline{\dfrac{n+1}{n}}$；

114. 等比数列 $a_n=a_1x^{n-1}$ 的求和公式：当 $x\neq 1$ 时，$S_n=\underline{\dfrac{a_1(1-x^n)}{1-x}=\dfrac{a_1-a_{n+1}}{1-x}}$. 若 $|x|<1$，则 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}x^k=\underline{\dfrac{1}{1-x}}$.

115. 等差乘以等比型数列求和 $(x\neq 1)$：

$$\sum_{k=1}^{n}kx^{k-1}=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}$$

当 $|x|<1$ 时，

$$\sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}=\underline{\frac{1}{(1-x)^2}}$$

对上式求导，

$$\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)x^{k-2}=\underline{\frac{2}{(1-x)^3}}$$

因为 $k^2x^{k-1}=x\cdot k(k-1)x^{k-2}+kx^{k-1}$，所以

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^2x^{k-1}=\underline{\frac{1+x}{(1-x)^3}}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^2x^{k}=\underline{\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}}$$

116. 常见裂项方法：

$$\frac{1}{n(n+k)}=\underline{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}\right)}$$

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\underline{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]}$$

$$\frac{1}{4n^2-1}=\underline{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+k}}=\underline{\frac{1}{k}(\sqrt{n+k}-\sqrt{n})}$$

$$\frac{a^n}{(a^n+1)(a^{n+1}+1)}=\underline{\frac{1}{a-1}\left(\frac{1}{a^n+1}-\frac{1}{a^{n+1}+1}\right)}$$

117. * 阿贝尔 (Abel) 求和公式：数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 A_n, B_n，那么

$$\sum_{k=1}^{n}A_kb_k+\sum_{k=1}^{n-1}a_{k+1}B_k=A_nB_n \tag{1}$$

118. 对于一阶线性递推数列 $a_{n+1}=Aa_n+B\ (A\neq 1)$，先解方程 $\underline{x=Ax+B}$，然后递推公式两边减去 x，$a_{n+1}-x=A(\underline{a_n-x})$，这样就转化成了等比数列。

119. $a_{n+1}=Aa_n+Bq^n$. 两边同除 q^n，有 $\dfrac{a_{n+1}}{q^n}=\underline{\dfrac{A}{q}\dfrac{a_n}{q^{n-1}}+B}$，这样就转化成了上一条中的一阶线性递推数列。

120. $a_{n+1}=Aa_n^2$，则 $Aa_{n+1}=\underline{(Aa_n)^2}=\cdots=\underline{(Aa_1)^{2^n}}$.

121. $a_{n+1}=a_n^2+2a_n$. 两边同时加 1，$a_{n+1}+1=\underline{(a_n+1)^2}$.

122. $a_{n+1}=a_n^2-2a_n+2$. 两边同时减 1，$a_{n+1}-1=\underline{(a_n-1)^2}$.

123. $a_{n+1}=\dfrac{Aa_n}{Ca_n+D}$，两边取倒数，$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\underline{\dfrac{D}{A}\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{C}{A}}$，那么 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 为一阶线性递推数列。

124. 对于二阶线性递推数列 $a_{n+2}=Aa_{n+1}+Ba_n$，先解特征方程 $\underline{x^2=Ax+B}$，假设有两个不等的根 x_1,x_2(可以为复数)，那么

$$\begin{aligned}a_{n+2}-x_2a_{n+1}&=x_1(a_{n+1}-x_2a_n)=\cdots\\&=\underline{x_1^n(a_2-x_2a_1)}\\a_{n+2}-x_1a_{n+1}&=x_2(a_{n+1}-x_1a_n)=\cdots\\&=\underline{x_2^n(a_2-x_1a_1)}\end{aligned}$$

125. 分式线性递推数列 $a_{n+1}=\dfrac{Aa_n+B}{Ca_n+D}$，先解方程 $\underline{x=\dfrac{Ax+B}{Cx+D}}$，假设有两个不等的根 x_1,x_2 (可以为复数)，那么

$$\begin{aligned}a_{n+1}-\alpha&=\underline{\frac{Aa_n+B-\alpha(Ca_n+D)}{Ca_n+D}}\\&=\underline{\frac{(A-C\alpha)(a_n-\alpha)}{Ca_n+D}}\\a_{n+1}-\beta&=\underline{\frac{Aa_n+B-\beta(Ca_n+D)}{Ca_n+D}}\\&=\underline{\frac{(A-C\beta)(a_n-\beta)}{Ca_n+D}}\end{aligned}$$

两式相除可得：

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}-\alpha}{a_{n+1}-\beta}&=\left(\frac{A-C\alpha}{A-C\beta}\right)\cdot\frac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}=\cdots\\&=\underline{\left(\frac{A-C\alpha}{A-C\beta}\right)^n\cdot\frac{a_1-\alpha}{a_1-\beta}}\end{aligned}$$

11 解析几何

126. 直线的方程：

一般式方程：$Ax+By+C=0$；

点法式方程：$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$；

斜截式方程：$y=kx+b$；

点斜式方程：$y-y_0=k(x-x_0)$；

截距式方程：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$；

两点式方程：$\dfrac{y-y_1}{x-x_1}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

127. 直线的参数方程：$\begin{cases}x=x_0+t\cos\phi\\ y=y_0+t\sin\phi\end{cases}$, ϕ 是直线的倾斜角，$|t|$ 表示直线上任一点到 (x_0,y_0) 的距离。更一般地，可以写成 $\begin{cases}x=x_0+at\\ y=y_0+bt\end{cases}$，若 $a^2+b^2\neq 1$，则此时的 $|t|$ 不再表示距离，这一点需要注意。

128. 点 (x_0,y_0) 到直线 $Ax+By+C=0$ 的距离公式：$\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

129. 两条平行直线 $Ax+By+C_1=0$ 和 $Ax+By+C_2=0$ 的距离公式：$\dfrac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

130. * 平面的方程：

一般式方程：$Ax+By+Cz+D=0$；

点法式方程：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$；

截距式方程：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

131. * 点 (x_0,y_0,z_0) 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离公式：$\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

132. 设二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根为 x_1,x_2，判别式为 Δ，则 $|x_1-x_2|=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$，$x_1^2+x_2^2=\dfrac{b^2-2ac}{a^2}$.

133. 椭圆和双曲线的准线方程是 $x=\pm\dfrac{a^2}{c}$.

134. 点差法，在椭圆上取不同的两点 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，则

$$\begin{cases}\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}=1\\[2mm] \dfrac{x_2^2}{a^2}+\dfrac{y_2^2}{b^2}=1\end{cases}$$

两式相减，有 $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\dfrac{b^2(x_2+x_1)}{y_2+y_1}$.

如果是双曲线，则 $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{b^2(x_2+x_1)}{y_2+y_1}$.

135. * 圆锥曲线（不包括圆）的统一极坐标方程：$\rho=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$. p 代表焦点到准线的距离。e 是离心率。椭圆：$0<e<1$；抛物线：$e=1$；双曲线：$e>1$. 过焦点且倾斜角为 θ 的弦的长度为 $\dfrac{2ep}{1-e^2\cos^2\theta}$.

136. 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的参数方程：$\begin{cases}x=a\cos\theta\\ y=b\sin\theta\end{cases}$.

137. 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的参数方程：$\begin{cases}x=\dfrac{a}{\cos\theta}\\ y=b\tan\theta\end{cases}$.

138. 抛物线 $y^2=2px$ 的参数方程：$\begin{cases}x=2pt^2\\ y=2pt\end{cases}$.

139. * 椭圆面积公式为 πab，而不是 $\dfrac{1}{2}\pi(a^2+b^2)$；椭球 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的体积公式为 $\dfrac{4}{3}\pi abc$，而不是 $\dfrac{4}{9}\pi(a^3+b^3+c^3)$.

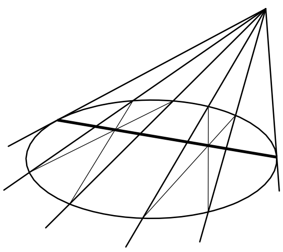
140. 到平面上两定点的距离之比为不等于 1 的定值的点的轨迹是圆 (称为“阿波罗尼奥斯圆”)。

141. 椭圆上一点 (x_0,y_0) 的切线斜率为 $-\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$，切线方程为 $\dfrac{xx_0}{a^2}+\dfrac{yy_0}{b^2}=1$ (换一半)。

142. 双曲线上一点 (x_0,y_0) 的切线斜率为 $\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$，切线方程为 $\dfrac{xx_0}{a^2}-\dfrac{yy_0}{b^2}=1$ (换一半)。

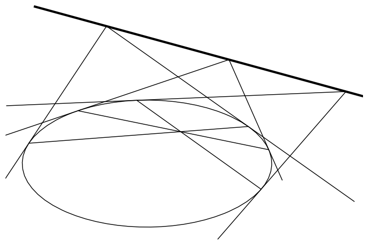
143. 抛物线 $y^2=2px$ 上一点 (x_0,y_0) 的切线斜率为 $\dfrac{p}{y_0}$，切线方程为 $yy_0=p(x+x_0)$ (换一半)。

144. 当点 (x_0,y_0) 在椭圆外部时，直线 $\dfrac{xx_0}{a^2}+\dfrac{yy_0}{b^2}=1$ 表示椭圆的切点弦，即从点 (x_0,y_0) 向椭圆作两条切线，连接两个切点得到的弦。



从点 (x_0,y_0) 出发作椭圆的两条割线，与椭圆有 4 个交点，那么以这 4 个交点为顶点的四边形的对角线交点也在切点弦上。

145. 当点 (x_0,y_0) 在椭圆内部时，直线 $\dfrac{xx_0}{a^2}+\dfrac{yy_0}{b^2}=1$ 与椭圆相离，从直线 $\dfrac{xx_0}{a^2}+\dfrac{yy_0}{b^2}=1$ 上的点向椭圆作两条切线，则切点弦过定点 (x_0,y_0).



146. 判断直线 l： $Ax+By+C=0$ 与椭圆的位置关系，将直线方程变形为

$$\frac{\left(-\frac{Aa^2}{C}\right)x}{a^2}+\frac{\left(-\frac{Bb^2}{C}\right)y}{b^2}=1$$

设 $P\left(-\frac{Aa^2}{C},-\frac{Bb^2}{C}\right)$，当 P 点在椭圆内部时（即 $A^2a^2+B^2b^2<C^2$），直线 l 与椭圆相离；当 P 点在椭圆上时，直线 l 与椭圆相切；当 P 点在椭圆外部时，直线 l 与椭圆相交。

147. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的性质：

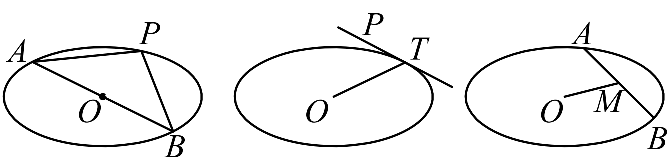
- 在椭圆外一点向椭圆做两条切线，切线夹角保持为 $\frac{\pi}{2}$ 时，切线交点的轨迹方程为 $x_0^2+y_0^2=a^2+b^2$ (蒙日圆，外准圆)
- 从椭圆中心 O 引出两条相互垂直的向径，与椭圆分别交于 P,Q 两点，从 O 点向 PQ 作垂线，垂足为 H，那么 H 点的轨迹也是一个圆（内准圆），圆的方程为 $x^2+y^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$. 斜边长度 $|PQ|$ 的取值范围是：

$$\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\leqslant|PQ|\leqslant\sqrt{a^2+b^2}$$

ΔOPQ 的面积的取值范围是：

$$\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\leqslant S_{\Delta OPQ}\leqslant\frac{1}{2}ab$$

- 以下三种情形，斜率之积为定值。



$k_{AP}\cdot k_{BP}=k_{OT}\cdot k_{PT}=k_{OM}\cdot k_{AB}=-\frac{b^2}{a^2}$.

- AB,CD 是椭圆的两条相交弦，交点为 P，且 AB, CD 的斜率互为相反数，则 $|PA|\cdot|PB|=|PC|\cdot|PD|$.
- * 椭圆上任意一点 $P(x_0,y_0)$，过 P 点作两条相互垂直的直线，这两条直线与椭圆的除 P 点之外的交点分别是 Q,R，那么线段 QR 过定点

$$\left(\frac{(a^2-b^2)x_0}{a^2+b^2},-\frac{(a^2-b^2)y_0}{a^2+b^2}\right)$$

- * 过椭圆内部一点 $M(x_0,y_0)$ 作椭圆的两条垂直弦 PQ,RS，弦 PQ,RS 的中点分别为 K,L，那么线段 KL 过定点

$$\left(\frac{a^2x_0}{a^2+b^2},\frac{b^2y_0}{a^2+b^2}\right)$$

- 椭圆上任意一点 $P(x_0,y_0)$，过 P 点作两条斜率互为相反数的直线，这两条直线与椭圆的除 P 点之外的交点分别是 Q,R，那么直线 QR 的斜率是定值，且与过 P 的切线的斜率互为 相反数。
- 在椭圆的长轴 AB 上有一定点 $M(m,0)$，过点 M 作椭圆的弦 CD，记直线 AC,BD 的斜率分别为 k_1,k_2，则

① $\frac{k_1}{k_2}$ 是定值；

② AC,BD 延长线的交点的轨迹方程是 $x=\frac{a^2}{m}$ ，即点 M 关于椭圆的极线；

③ 设②中的极线与 AB 延长线的交点为 H，则 CH,DH 的斜率互为 相反数。

- P 为椭圆上一点，F_1,F_2 是椭圆的左右焦点，$\angle F_1PF_2=\theta$，则 $S_{\Delta F_1PF_2}=b^2\tan\frac{\theta}{2}$.
- F_1,F_2 是椭圆的两个焦点，椭圆上一点 P 处的切线 PT 平分 ΔPF_1F_2 在点 P 处的外角。焦点在直线 PT 上的投影点的轨迹是以长轴为直径的圆。以 PF_1(或 PF_2) 为直径的圆必与以长轴为直径的圆 内切。
- 设椭圆的左右两个顶点为 $A_1(-a,0),A_2(a,0)$，与 y 轴平行的直线交椭圆于 P_1,P_2 时，A_1P_1 与 A_2P_2 的交点的轨迹方程是 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

148. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的性质：

- 从不在双曲线上的一点做双曲线的两条切线，如果两条切线垂直，那么切线交点的轨迹也是一个圆 (蒙日圆，外准圆)，圆的方程为 $x^2+y^2=|a^2-b^2|$.
- 从双曲线的中心 O 引出两条相互垂直的向径，与双曲线分别交于 P,Q 两点，从 O 点向 P,Q 作垂线，垂足为 H，那么 H 点的轨迹也是一个圆 (内准圆)，内准圆的方程是 $x^2+y^2=\frac{a^2b^2}{b^2-a^2}$. 双曲线内准圆存在的充要条件是虚轴大于实轴，即离心率大于 $\sqrt{2}$.
- * 双曲线上任意一点 $P(x_0,y_0)$，过 P 点作两条相互垂直的直线，这两条直线与双曲线的除 P 点之外的交点分别是 Q,R，那么线段 QR 过定点。

$$\left(\frac{(a^2+b^2)x_0}{a^2-b^2},-\frac{(a^2+b^2)y_0}{a^2-b^2}\right)$$

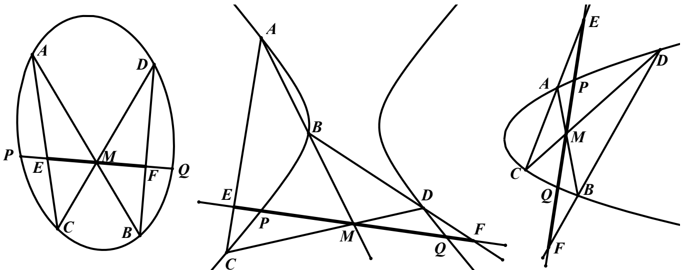
必须满足 $a\neq b$，定点才存在。

- * 过平面上任意一点 $M(x_0,y_0)$ 作双曲线的两条垂直弦 PQ,RS，弦 PQ,RS 的中点分别为 K,L，那么线段 KL 过定点。
$$\left(\frac{a^2x_0}{a^2-b^2},-\frac{b^2y_0}{a^2-b^2}\right)$$
必须满足 $a\neq b$，定点才存在。
- 双曲线上任意一点 $P(x_0,y_0)$，过 P 点作两条斜率互为相反数的直线，这两条直线与双曲线的除 P 点之外的交点分别是 Q,R，那么直线 QR 的斜率是定值，且与过 P 的切线的斜率互为 $\underline{\text{相反数}}$。
- P 为双曲线上一点，F_1,F_2 是双曲线的左右焦点，$\angle F_1PF_2=\theta$，则 $S_{\Delta F_1PF_2}=\underline{\dfrac{b^2}{\tan\frac{\theta}{2}}}$.
- 设 $k>0$，则等轴双曲线 $y=\dfrac{k}{x}$ 的实半轴和虚半轴的长度均为 $\underline{\sqrt{2k}}$，焦点坐标是 $\underline{(\pm\sqrt{2k},\pm\sqrt{2k})}$.

149. 抛物线 $y^2=2px$ 的性质：

- 抛物线的焦点为 F，顶点为 O，过焦点的直线与抛物线交于 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$ 两点，则
$\dfrac{1}{|FP|}+\dfrac{1}{|FQ|}=\dfrac{1-\cos\theta}{p}+\dfrac{1-\cos\theta}{p}=\underline{\dfrac{2}{p}}$；
$|FP|+|FQ|=\dfrac{p}{1-\cos\theta}+\dfrac{p}{1+\cos\theta}=\underline{\dfrac{2p}{\sin^2\theta}}$；
$y_1y_2=\underline{-p^2}$，$x_1x_2=\dfrac{y_1^2}{2p}\cdot\dfrac{y_2^2}{2p}=\underline{\dfrac{p^2}{4}}$；
$S_{\Delta OPQ}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{p}{2}\cdot\left(\dfrac{2p}{\sin^2\theta}\cdot\sin\theta\right)=\underline{\dfrac{p^2}{2\sin\theta}}$.
- 抛物线的对称轴上有一个固定点 $M(x_0,0)$，过 M 的直线与抛物线交于 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$ 两点，则
$y_1y_2=\underline{-2px_0}$，$x_1x_2=\dfrac{y_1^2}{2p}\cdot\dfrac{y_2^2}{2p}=\underline{x_0^2}$.
- 抛物线的顶点为 O,A,B 两点在抛物线上，若 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-p^2$，则直线 AB 过定点 $\underline{(p,0)}$.
- 从准线上的一点 $P\left(-\dfrac{p}{2},y_0\right)$ 向抛物线作两条切线，设切点分别为 Q,R，则这两条切线 PQ,PR 相互 $\underline{\text{垂直}}$。设抛物线焦点为 F，那么 QR 恒过 $\underline{\text{焦点}}$，且 $PF\perp\underline{QR}$.
- 抛物线上任意一点 $P(x_0,y_0)$，过 P 点作两条相互垂直的直线，这两条直线与抛物线的除 P 点之外的交点分别是 Q,R，那么线段 QR 过定点 $\underline{(x_0+2p,-y_0)}$.
- 抛物线上任意一点 $P(x_0,y_0)$，过 P 点作两条斜率互为相反数的直线，这两条直线与抛物线的除 P 点之外的交点分别是 Q,R，那么直线 QR 的斜率是定值，且与过 P 的切线的斜率互为 $\underline{\text{相反数}}$。

150. * 蝴蝶定理：在圆锥曲线中，过弦 PQ 的中点 M 任作两条弦 AB,CD，直线 AC,BD 交 PQ 于点 E,F，则 $ME=EF$.



椭圆　双曲线　抛物线

12 零散考点

151. $\pi\approx3.141592653$ 的分数近似值：
$\dfrac{22}{7}\approx3.142857$, $\dfrac{355}{113}\approx3.14159292$.

152. 三次方程韦达定理：$(a\neq0)$，
$$x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=0$$
$x_1+x_2+x_3=\underline{-\dfrac{b}{a}}$；
$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\underline{\dfrac{c}{a}}$；
$x_1x_2x_3=\underline{-\dfrac{d}{a}}$.

153. 因式分解：
$$a^3\pm b^3=\underline{(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)}$$
$$a^4-b^4=\underline{(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)}$$
$$=(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$$
$$a^n-b^n=(a-b)(\underline{a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1}})$$
$$a^3+b^3+c^3-3abc=$$
$$\underline{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}$$

154. 锥体 (圆锥、棱锥) 体积公式：$V=\underline{\dfrac{1}{3}Sh}$，
S 为底面积，h 为锥体高度。

155. 圆台或棱台的体积：$V=\underline{\dfrac{1}{3}(S+\sqrt{SS'}+S')h}$，
S,S' 为两个底面积，h 为台体高度 (两个底面间的距离)。

156. 球的表面积 $S=\underline{4\pi R^2}$，球的体积 $V=\underline{\dfrac{4}{3}\pi R^3}$.